刘式达　刘式适编著

非线性动力学和复杂现象

气象出版社

非线性动力学
和复杂现象

刘式达　刘式适　编著

气象出版社

内 容 简 介

本书从多个角度论述了非线性力学和自然界复杂现象的关系。作者根据近代非线性力学的观点，剖析了表现在物理学、化学、生物学、天文学以及地学中的各种复杂现象的个性和共性。内容涉及分岔，突变、浑沌、耗散结构、分数维、协同学和细胞自动机等多种非线性力学中的全新概念。

本书内容较全面，讨论风格深入浅出，较易通读，适合于各类理工科专业的大学生、研究生以及科技工作者阅读，也是一本有关专业的研究生教学参考书。

非线性动力学和复杂现象
刘式达　刘式适　编著
责任编辑　邹坚峰
·　·　·
气象出版社出版
（北京西郊白石桥路46号）
北京妙峰山印刷厂印刷
气象出版社发行　各新华书店经售
·　·　·
开本：787×1092　1/32　印张：8.125 字数：175.5千字
1989年12月第一版　1989年12月第一次印刷
印数：1—1500　　定价：1.75元
ISBN 7-5029-0266-X/P·O·0012（课）

前　言

多年的教学和科研工作使我们体会到，非线性动力学对于解决在物理学、化学、生物学、天文学和地球物理学中所遇到的各种复杂现象和问题有重大的意义。

本书的目的在于让读者了解非线性动力学研究的主要课题和解决自然界各种复杂现象的可能途径。

本书较全面地介绍了非线性动力学的主要内容：分岔、突变、协同学、浑沌、分维和细胞自动机等，并分析了各种复杂现象的个性和共性，全书力图深入浅出，着重物理概念和几何图象。

全书共分十章。第一章介绍在自然界存在的一些复杂现象并剖析了它们的共性；第二章较仔细地分析了一些复杂现象产生的原因，并简述了Prigogine的耗散结构学说；第三章从相空间角度分析了非线性动力系统的基本形态，其中着重说明吸引子的概念和特征；第四章到第九章分别介绍了非线性动力学的主要内容，它包括分岔、突变、协同学、浑沌、碎形和分数维、细胞自动机；第十章综合了各种研究非线性系统的方法，并给出了一个大气湍流模型，说明非线性动力学方法的应用。

本书的编写较广泛地参考了国内外非线性研究的论著，其中不少是近十多年的研究成果，由于涉及内容较多，编写时间较短，加之水平有限，难免有错误和不当之处，希望读者给以指正。

作者　刘式达、刘式适

于北京大学1989年3月5日

目　录

第一章　自然界的复杂现象

现在已是20世纪的末期，探索大自然、飞向宇宙、揭开生命科学的奥秘、使破坏了的环境重新清洁起来已经成为我们的主要目标。为了实现这个目标，科学将日益发挥重要的作用。

人们对事物的认识总是由浅到深的，而且随着科学技术的发展，认识还在不断的深化。我们所处的年代，科学本身也正经历着重大的变革。以往科学的发展使人们陶醉于自然界的和谐与完美之中。我们似乎形成了这样一个概念，这就是任何复杂的自然现象，我们总可以找到一条简单的规律或用一组确定的方程来描述。物理学家几乎一致认为宇宙的基本定律是决定性的和可逆性的。牛顿第二定律

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$$

是这种观点的代表。上式中m表示质量，x是质点位置向量，$v=\frac{dx}{dt}$、$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$分别是速度向量和加速度向量，$F$是外力。在上式中若将时间$t$反转变为$t'=-t$，那么它的形式并无变化。这就是说，过去和将来起着完全相同的作用（可逆性）。根据牛顿第二定律，事物的演化（即质点的位置x变化）完全由初条件决定（决定性）。正如著名物理学家拉普拉斯所说：“只要给我初条件，我就可以决定未来的一切”。多么完美的自然！爱因斯坦的相对论正是这种时间和

空间高度对称性的产物。

事物果真是如此简单的演化吗？时空果真是如此对称吗？复杂、多样化和不稳定的自然界本身就是最好的回答。在这个复杂的世界上既可以发现可逆性，也可以发现不可逆性的事物演化，下面我们将看到扩散过程和化学反应就是不可逆的过程。除了决定性的现象还有随机性的现象。统计力学的研究虽然还认为未来是可以预测的，但只是在统计意义上来讲的，量子力学的“测不准原理”已经告诉我们未来的有些量是不能预测的。象生物那种在形态和功能上最复杂最有组织的物体，其基本形成过程本身就是不可逆的和随机的。正象著名物理学家普利高津（Prigogine）所说：“许许多多塑造着自然之形的基本过程本来是不可逆的和随机的，那些描述基本相互作用的决定性和可逆性的定律不可能告诉人们自然界的全部真情”。

普利高津的“耗散结构”学说的提出，对时间的对称性发生了疑问，为研究自然界不可逆的复杂现象提供了新的理论依据，因而1977年普利高津获得了诺贝尔奖。浑沌（chaos）学说的提出，对“决定论”以巨大的冲击，长期不能解决的湍流现象，又从幻想中找到了希望。这些学说大大丰富了我们对事物演变的认识。如果“未来已经包含在过去之中”，那么我们还要研究什么新的现象呢？如果“未来都是确定性的”，那还谈得上变化的多样化的世界呢？新的观点正把科学家们的热情引导到去探索复杂的世界，“未来并不完全包含在过去之中”。正象普利高津和尼科里斯（Nicolis）说的，代替“未来即意味着将来”的观念结构，我们正步入一个世界，在这里未来是不决定的，时间是一种构造，我们所有的人都可以参与其中。

除耗散结构、浑沌学说以外，分岔（bifurcation）理论，汤姆（Thom）的突变（catastroPhe）说，蒙德布罗（Mandelbrot）的分数维（fractal dimension）学说，哈肯（Haken）的协同学（synergetics），沃尔弗兰（wolfram）的细胞自动机（cellular automata）正在互相深透和补充，形成一门研究复杂现象的学科——非线性动力学。

§1 物理学中的复杂现象

我们观察一支燃着的香烟，在平稳的气流中缓缓升起一缕烟气，突然卷曲成一团剧烈扰动的烟雾，四处飘散。打开的自来水先是均匀而流，然后却水花四溅。一个风和日丽的晴天，很快却来了暴风骤雨。一架装有最先进气象雷达的飞机，飞行中穿过看不到但能感受到的湍流时，象爆米花似地颠簸起来。全世界每年有百万人突然死于心脏病发作。生物体的自我复制或遗传产生多样化的生物形态。这一切现象都说明自然界的现象是非常复杂的，正象1982年诺贝尔奖获得者威尔逊（Wilson）所说："天气的变化，飞机的飞行，石油在地下输油管里流动，无不包含着紊乱"。他在这里说的紊乱就是指的复杂现象。

自然界的演化过程常常导致种类繁多、功能多样、结构复杂的形态。下面先给出几个物理学中的例子。

〔例1〕贝纳（Benard）对流问题

这是研究热对流和大气环流的基本问题。一流体薄层为两无穷长平板隔开（图1.1）。设上下板的温度分别为T_1和T_2。若T_1和T_2相同，即$\Delta T = T_2 - T_1 = 0$，那么流体所有部分温度均相同，且与上下板温度（即环境温度）相同，此时体系和环境没有热量交换，即体系处于平衡态。若有人把

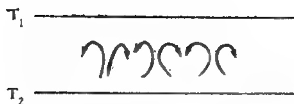


图 1.1贝纳对流

手指在下板放了很短的一瞬间，这时板的局部温度将发生瞬时变化（即产生一个扰动或涨落），但由于系统处在平衡态，这个涨落并不会发生作用，温度很快趋于一致。

现在，若从下板加热流体层，即以热的方式向体系输入热量，这时平衡条件$\Delta T=0$被破坏，导致$\Delta T=T_2-T_1>0$。在ΔT很小时，体系从下板向上板输送热量，热流再从上板扩散到外界以保证T_1不变，这种现象就是热传导。和平衡态相同的是流体仍处于简单的静止状态，和平衡态不同的是温度由下板到上板呈线性分布。

若增加ΔT，体系离平衡态愈来愈远，当ΔT超过某一临界值以后，流体便从静止状态突然开始作整体的对流运动（图1.1），对流泡沿水平轴连续呈现顺时针旋转（右旋）或逆时针旋转（左旋）。这就把原来静止的对称性破坏了，而形成左旋右旋相间的对称破缺状态。和平衡态时不同，小的涨落不再被衰减而是被体系放大，使原有的静止状态失去稳定性，而分岔出热对流的状态。这里我们还应该注意，由于涨落的随机性，给定的空间区域流体可能是右旋也可能是左旋，这就是解的多重性。而且左旋和右旋的对流泡之间有强烈的关联作用，互相协调一致形成对流状态。

对流状态形成以后，若ΔT再增加，就会出现湍流形态，这种形态似乎看起来不规则，但其内部有极其复杂的目

相似结构。

〔例 2 〕卡曼(Karman)涡街

这是流体力学的重要问题。一个半径为L的无穷长圆柱放在流速为U，粘性系数为ν的流体中。当雷诺数$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$较小时（实际上就是来流速度$U$较小），柱后面的流体运动$v(t)$是定常的。当Re数增大到超过某一临界值后，$v(t)$就是周期运动。Re再大，柱前面开始从左右两侧分离开两两间隔反向的涡旋，称为卡曼涡街。不断增加Re的结果，$v(t)$就变成湍流运动。图1.2表明了不同Re数时的运动形态。

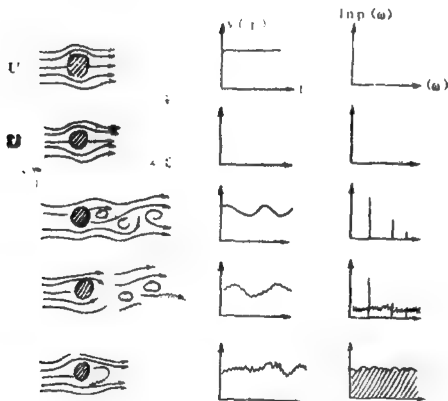


图 1.2 卡曼涡街

图1.2中还附有时间序列$v(t)$及相应的功率谱$P(\omega)$，以此表明形态的不同类型。大气中常见到整齐间隔排列的云，连续不断排列成长条，称为“云街”，它和卡曼涡街很相似。

〔例 3〕激光器

带有两个反射镜的氙灯照射的红宝石激光器，能量激发原子发光。当氙灯能通量小时，发射光的电场强度构成一个随机波（图1.3）；当功率超过某个临界值以后，发射光则是正弦波；功率再大便放射极短的脉冲；当脉冲随时间作周期变化时，这在空间上就形成一个孤立子（soliton）。

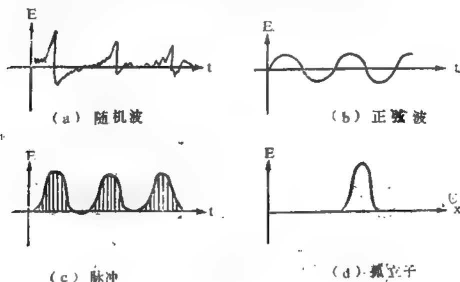


图 1.3 激光器电场强度随通量的变化

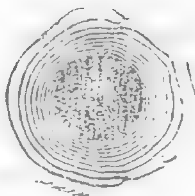
§2 化学中的自组织现象

长期以来，化学家们总是相信，无论经过任何化学变化，一个类似于平衡态的均匀的、不随时间变化的状态最终总要出现。假如出现一点偏离，反而怀疑实验方法或其它原因。实际上这种情况常常出现在孤立系统中的化学反应。假

如在反应中允许以不同速率向体系输入反应物或输出产生物，出现的情况就完全不同了。最典型的例子就是贝洛索夫—札博廷斯基（Belousov—Zhabotinski，简称BZ）反应。将硫酸铈$Ce_2(SO_4)_3$，丙二酸$CH_2(COOH)_2$，溴酸钾$KBrO_3$化合，结果发现产生物的浓度随时间作周期变化。一会儿呈红色（产生过量的Fe^{2+}离子或Ce^{3+}离子），一会儿呈蓝色（产生过量的Fe^{3+}离子或Ce^{4+}离子），一会儿呈红，再一会儿又变蓝，象钟摆一样作规则的时间振荡。这类现象称为化学振荡或化学钟，有时也会观察到非周期的过程，这就是化学湍流。在某些条件下，成分的浓度在空间上也很不均匀，形成很多漂亮的花纹（图1.4）。这十分类似于发生在生物体中的生物振荡和生物形态现象。

另一个例子是胶体化学中的周期沉淀现象：如果将碘化钾溶液加到含硝酸银的胶体介质中，在某些实验条件下，形成的碘化银沉淀的分布并不是均匀的或单调变化的，而是一条条规则间隔的带或环（图1.5），这样的环叫利色根环。


图 1.4 札博廷斯基花纹


图 1.5 利色根环

§3 生物系统的复杂功能

大家知道，生物体（包括人类）是自然界中种类繁多，功能复杂、形态多样的最有组织的物体。生物确实是在远离平衡态的条件下生存的，一个生物作为一个整体来接受连续的能量流（例如植物吸收阳光用于光合作用）和物质流（如营养品），然后又转换为各种废物排泄到环境中去。生物体又具有高度不均匀的结构，生物体只有死亡之后，才真正开始被环境同化，跟环境均匀一致。一部生物进化史，就是生物从原始的比较均匀的无序结构发展为高级的不均匀的有序结构的历史。原始细胞有了细胞膜，避免了自身和海水的均匀。真核细胞更进一步，在细胞内分化出细胞核和各种细胞器来。植物由根、茎、叶、花、果组成，动物有各种器官，这种不均匀性有利于生命的稳定。

生物之间以及生物和环境之间是相互依存的关系，这种依存关系往往又是非线性的。就拿大鱼吃小鱼来讲，若是线性关系只能是小鱼多，大鱼就多。事实并非如此，大鱼多了，小鱼被吃掉多了，小鱼就减小；小鱼少了，大鱼没有足够的食物，大鱼也就要减小。大鱼和小鱼的数量构成一种周期性的振荡。果树也有大年和小年。生物的种群数目除了周期变化以外，也可以在一段时期内处于稳定的数值上，也可以是非周期的变化，见图1.6。

生物的进化是典型的不可逆过程，正象“控制论”的创始人维纳所说：“生物学研究的现象完全是单向性的，生命不恰恰是死的反演，同化（即组织的形成）也不恰恰是异化（即组织的破坏）的反演。细胞分裂不是按照时间上对称的式样来进行的，由生殖细胞结合成受精卵的过程也是单向性

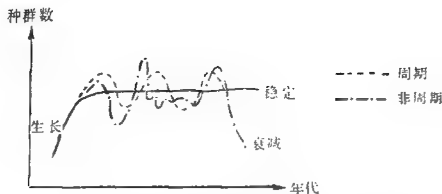
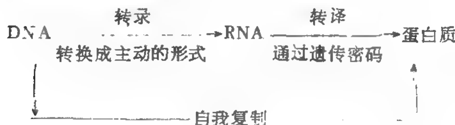


图 1.6 生物种群数目的变化

的，个体是顺着一个时间方向前进的飞箭，种族也同样从过去进入未来"。

生命是如何形成的？生物何以有不同的构造、形态？生长、代谢、感应及生殖的原理是什么？为了引起大家的兴趣，这里简要介绍一下生命模型的进展状况。

19世纪在细胞核中发现了核酸，它们有两种：DNA（脱氧核糖核酸）和RNA（核糖核酸）。直到七八十年以后才发现生命的遗传信息是通过染色体中的DNA来携带的，子代分别从父本精子和母本的卵子细胞中得到染色体，然后通过一系列复杂过程，其中包括DNA的自我复制，蛋白质的制造，细胞的复制，细胞的分化等。生物学家们拟订出核酸和生命现象关系的模型：



制成的蛋白质也有两种：组成性蛋白质（用于组成细胞膜或内质网等细胞器）和功能性蛋白质（用于形成酶）。前者促使细胞增大，产生生物体的生长现象；后者促使代谢及感应作用。不同种类的生物体，其细胞中的DNA分子内的碱基排列也不同，所产生的RNA自然迥异，由RNA制造出来的蛋白质也不同。这就导致各种生物体具有不同的构造、形态、代谢方式和生态适应。

揭示了核酸制造蛋白质的秘密，不仅使人们了解生命现象的物质基础，更重要的是为生命的复制和改造描绘了可以想象的图景。1959年孔伯格（Kornberg）在试管中用化学合成方法破天荒地造出了DNA，因而他获得了诺贝尔奖。1968年他又制造出人类史上第一批人造生命（病毒）。这样，生命体的自我复制或生物的遗传机制成为目前最迷人、最深刻的研究课题之一。

§4 宇宙的复杂性

前面说到物理、化学、生物中出现的复杂现象，整个宇宙如何呢？19世纪热力学第二定律的诞生把人类认识水平向前大大推进了一步。但是克劳修斯（Clausius）和汤姆孙（Thomson）等人把仅对孤立系统适用的热力学第二定律推广到整个宇宙，得出荒谬的“宇宙热寂论”，认为整个宇宙都发生着熵增加，一切物体的热量只能由高温流向低温，最后温度差消失，压力变为均匀，整个宇宙达到热平衡，熵达到最大值，可以做功的热量消失，一切变化（恒星的发光、发热，地球上的风雨雾雷电等）都将没有发生的可能，因而整个宇宙都停止变化。而现实的宇宙却并非如此，在我们的世界上，找不到一小块内部绝对均匀、绝对无序的物质。星

系、分子、原子、原子核都不是绝对均匀体，它们具有不同特点的结构。星云就是从密度极稀的星际弥漫物质中集结起来的，在这种集结过程中，又逐渐形成密度集中的恒星群，

“天演论”作者赫胥黎把进化论从生物推广到宇宙，他说：“不仅植物界，而且动物界；不仅生物，而且地球的整个结构；不仅我们的行星，而且整个太阳系；不仅我们的恒星及其卫星，而且作为那种遍及于无限空间，并持续了无限时间秩序的证据的亿万个类似星体，都在努力完成它们进化的预定过程”。

近年来，在天体物理学中不断受到人们重视的黑洞学说，更进一步证实宇宙的不均匀性和复杂性。根据广义相对论的推论，在具有巨大质量的恒星演变晚期，当它的半径变得小于引力半径时，引力坍缩就会一直进行下去，演变为黑洞。黑洞具有极其强大的引力，引力场强到使其周围的空间高度弯曲，以致光线也无法辐射出去。在黑洞的引子范围内，一切物质，包括辐射及其携带的能量，都将被它吸收进去，这就使宇宙中某些区域质能高度集中。

§5 大气运动和气候的复杂性

大气运动的复杂性可以由表现出来的天气变化为证。几乎没有一天的天气是完全相同的。随着工业化的发展以及人们科学水平的提高，近20年来全世界范围内的“气候异常”已经成为气象学家们最关心的问题。

气候变暖还是变冷？对过去40万年里用同位素的技术发现，冰河期和间冰期（夹在冰河期之间的较暖和时期）之间大约有10万年的平均周期，见图1.7。

气候系统是一个开放系统。气候变化的首要因素是太阳

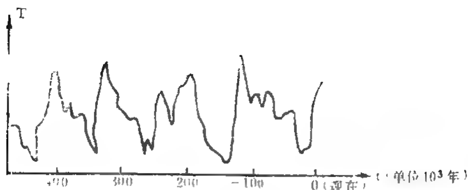


图 1.7　气候变化

辐射能量的变化。此外，地球旋转轴的进动（象陀螺），地球旋转轴与太阳方向之间的倾角在23.5°附近变化（可以由21.8°变到24.4°），地球轨道偏心率的变化也都影响着气候。

从表面上看，地球偏心率的变化也是10万年的周期，和气候变化周期相同，但由此引起的太阳常数（即大气上界垂直于太阳光线方向上单位时间内单位面积所接受到的太阳能）的变化只有0.001。这就产生一个矛盾，一方面两者周期之间的关系给人印象很深刻，另一方面对气候系统的外强迫力太小，以致不能触发气候变化。然而，气候系统又是一个远离平衡态的系统，赤道吸收了大部分太阳热，两极则吸收很少的太阳能，且又有大部分被反射回太空。这就象贝纳对流一样，产生复杂气候的条件是存在的，微小的涨落通过内部的机制（例如海气相互作用等）加以放大，从而形成巨大的气候变化。

§6 复杂现象的共性

前面从物理、化学、生物、大气及宇宙学中的例子说明了自然界中普遍存在着复杂的现象。这些复杂现象归纳有如下

几个共性：

1.它们处于开放的、远离平衡的系统中

由于每一事物总要和它周围的其它事物有联系、有影响，系统与系统之间总会有千丝万缕的联系和相互作用，所以我们决不能把一个系统绝对"孤立"起来，实际上系统总是开放的。并且系统所受到的外部约束经常处于远离平衡的状态。例如贝纳对流中上下板温差ΔT很大，赤道和极地接受到的太阳能差别很大，化学反应中不断地加入反应物和抽出产生物，生物系统的吸收和排泄等等。只有这样，才能造成系统的形态不断演化，复杂现象才得以发生。

2.系统是自组织的并有一个自组织的核心

复杂现象的形成是由于内部自己组织的结果。贝纳对流中，当ΔT很小时，分子处在杂乱无章的排列状态使流体静止。但当ΔT超过某一临界值以后，分子中有一个"核心"下了"向上"的命令，于是周围的分子便组织起来一齐向上，形成向上的垂直运动，然后到达上板后便向左右两边再向下运动形成对流泡。这些对流泡中有带头的核心，正象晶体中的晶核，云中的凝结核一样。

3.存在非线性的相互作用

事物或系统中的各个部分的相互作用若是线性的只能造成系统的衰亡，因为此时事物只能是无限增长或衰减的极端均匀状态。事物相互依存的非线性性，表现在相互约束、相互反馈上。当增长太快时，相互作用使其减慢，当增长太慢或衰减时，相互作用使其加快。有了非线性才有形态的多重性：定常状态，周期状态，准周期状态，非周期状态，局部的复杂结构等等。

4.过程是不可逆的

复杂现象形成的过程是不可逆的。生物由低级向高级进化，现有的高等动物决不会退化为低等动物。贝纳对流随着ΔT加大，静止到对流再到湍流，最后积云发展到一定程度就下雨，而决不会倒退重复原有的逆过程。地球24小时自转一周，但每天天气是不可重复的。

生物类型的不可逆性有深远的进化意义，它使生物所获得的适应可以得到稳定，并且在此基础上继续发展。

5.涨落和对称破缺

复杂现象一定伴随着对称破缺的结构，贝纳对流中有左旋右旋，Bz反应中有蓝有红，也就是非均匀的状态。这里面涨落起着决定性作用，某一局部是左旋还是右旋，由随机的涨落决定。在临界点附近，涨落被放大，使系统的形态发生质的转变。

最后我们应该指出，不可逆性（或耗散性）常常带来事物的整体稳定性（或可重复性），例如贝纳对流中的对流，Bz中的化学钟等，尽管形态中的细节（如左旋右旋）可能有差别。而非线性和涨落伴随着局部不稳定性和不可预测性，这主要是指细节上而言，是指长期意义上说的。两者是辩证统一的，有序是指形成复杂性的可重复的结构，但并不是说，细节上及外形上都完全相同，甚至外形上看起来很混乱。

第二章　复杂现象产生的原因

第一章中我们引入了自然界复杂性现象的例子，并分析了它们的共性。这一章我们更仔细分析复杂现象产生的原因。

§1　守恒系统和耗散系统

经典的力学几乎都是研究守恒系统。例如质点在外力作用下沿直线运动，按牛顿第二定律，其方程式为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x) \tag{2.1}$$

令 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$，因 $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$，则方程(2.1)化为

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=F(x) \tag{2.2}$$

(2.2) 式对x积分便得到

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2+\int -F(x)dx=\text{const}. \tag{2.3}$$

(2.3)式意味着，系统的动能$\frac{m}{2}\dot{x}^2$加上位能$V(x)=-\int F(x)dx$为常数，即(2.3)式是总能量随时间不变化的守恒系统。

一个守恒系统能产生复杂现象吗？我们现以质量$m=1$，



图 2.1 单摆

摆长为单位长，并不考虑阻尼的单摆为例（见图2.1），若以θ表示角位移，记$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$，$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$，则单摆运动方程为

$$\ddot{\theta}+g\sin\theta=0 \tag{2.4}$$

其中g为重力加速度。由（2.3）式，单摆的总能量为

$$H=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+g\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+g(1-\cos\theta) \tag{2.5}$$

H也称单摆系统的哈密顿（Hamilton）算子。

令$x=\theta$，$y=\dot{\theta}$，则方程（2.4）化为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-g\sin x\end{aligned} \tag{2.6}$$

我们把位移x和速度y描述的单摆状态$(x,\ y)$，或$(\theta,\ \dot{\theta})$称为相空间。在此空间中的每一点就对应着单摆的一个瞬时状态。当时间t变化时，状态空间在相空间中描述出一条曲线，它叫轨线。我们把速度$\dot{x}$和加速度$\dot{y}$都为零的点叫平衡点，也称定常态（简称定态）。

由（2.6）式看出，单摆运动有两个平衡点，一个在下垂直方向$\theta=0$（即$x=0$，$y=0$），另一个在上垂直方向$\theta\pm\pi$（即$x=\pm\pi$，$y=0$）。显然，对平衡位置$\theta=0$的微小扰动，单摆仍作有界的振动，它们在相平面$(\theta,\ \dot{\theta})$上的轨线为围绕（0，0）的闭合椭圆簇，故点（0，0）叫稳定的椭圆点。相反，若摆处在$\theta=\pm\pi$位置上，则它是不稳定的，微小的扰动可使单摆作无界的旋转，定点$(\pm\pi,\ 0)$

叫双曲点（鞍点），见图2.2。图中箭头方向代表时间增加的方向。应该说明，由于定点上变量的变化率为零，这实际上相当于时间趋向无穷大的结果。

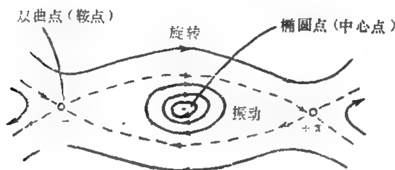


图 2.2　单摆在相平面 $(\theta, \dot{\theta})$ 上的轨线

图中有界振动和无界旋转区的分界线（虚线）常常叫分型线（seParatrix），两个双曲点之间经过的时间为无穷大，也可以认为振动周期为无穷大。用非线性波中的语言来说，椭圆点附近的振动叫椭圆余弦波（cnoidal wave），它们有有限周期．而分型线上的运动周期变为无穷大，这就是孤立波（solitary wave）。

按照第一章例子，要产生复杂现象必须有局部的不稳定因素，所以保守系统中分型线和双曲点是产生复杂性的机制。

还应该指出，守恒系统的相空间体积在运动中是不变的。在（2.6）式中，我们把 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 看成是速度向量 v 的两个分量，因此 v 的散度就代表体积变化率，即

$$\operatorname{div} v=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}=0 \tag{2.7}$$

$\operatorname{div} v=0$，表示体积守恒，因而守恒系统不存在运动吸引

到一个很小的体积空间的"吸引"性质。

象方程（2.1）描述的守恒系统，第一章已经提到，它们是可逆的。自然界还有一类系统，它们与"摩擦"、"粘性"、"耗散"等联系在一起，这就是耗散系统。最典型的例子就是热传导或扩散方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\nabla^2 T \tag{2.8}$$

以及化学反应方程

$$\frac{dc_A}{dt}=-kc_Ac_B \tag{2.9}$$

（2.8）式中的T代表温度或浓度，k是热传导系数或物质扩散系数，∇^2是拉普拉斯算符，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。（2.9）式中$c_A$是化学反应的反应物浓度，$c_B$是另一反应物的浓度，$k$是反应速率。

和可逆的保守系统相反，耗散系统的特征是不可逆性。即对于时间的反演，规律不再是不变了。若令$t=-t'$，则（2.8）式和（2.9）式就分别变为

$$\frac{\partial T'}{\partial t'}=-k\nabla^2 T' \tag{2.10}$$

和

$$\frac{dc_A'}{dt'}=kc_A'c_B' \tag{2.11}$$

（2.10）式说明T不再扩散而是积累了，（2.11）式说明反应物c_A不是减少而是增加了。（2.8）式和（2.10）式从物理上反映不同的物理过程，（2.9）式和（2.11）式在化学上代表不同的反应情况。

从第一章各种例子都可看出，不可逆过程是产生复杂现

象的主要原因。

除此之外，耗散系统的第二个特点是存在吸引子（attractor）。在守恒系统（2.1）中若加进阻尼项$\alpha\dfrac{dx}{dt}$，则(2.1)式变成下列耗散系统（设$m=1$）

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}=F(x)\qquad(\alpha>0)\qquad(2.12)$$

从总能量$E=\dfrac{\dot{x}^2}{2}+\int -F(x)dx$ 变化看

$$\frac{dE}{dt}=\dot{x}\ddot{x}-F(x)\dot{x}=-\alpha\dot{x}^2<0\qquad(2.13)$$

（2.13）式说明，此时总能量不再是守恒了，即质点不再沿一个等能量面（象单摆问题中的椭圆）运动，总能量要衰减，质点再也不象单摆一样绕椭圆点（中心点）振动，而是轨线变成螺旋线，最后趋向于定点，见图2.3。

这是由于能量耗散的必然结果。图2.3中的平衡点叫焦点，它显然是稳定的。

令$\dot{x}=y$，则系统（2.12）变成

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=-\alpha y+F(x)\end{aligned}\qquad(2.14)$$

我们同样也可以计算系统（2.14）的体积变化率

$$\operatorname{div}v=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=-\alpha<0\qquad(2.15)$$

（2.15）式说明，相空间体积是收缩的，最后使质点吸引到一个有限空间中去，这就是吸引子。

第一章例子中的各种复杂形态，吸引子是其主要内容。现在常提到四种吸引子——定态吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和浑沌吸引子，这些都是耗散系统中的特征。

第一章§3中大鱼吃小鱼的例子就是典型的周期吸引子。若以x_1和x_2分别代表大鱼数和小鱼数，则在相空间(x_1, x_2)中，轨线就是一闭合曲线——极限环(limit cycle)，如图2.4。



图 2.3 耗散系统中的平衡点——焦点

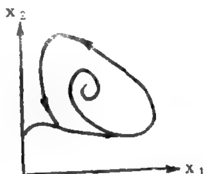


图 2.4 耗散系统中的周期吸引子——极限环

应该指出，从表面上看单摆振动和极限环同样是周期运动，但两者有本质区别。前者受扰动影响使单摆振幅（θ角）改变，而后者不管初始扰动如何，最后还会重复出现极限环，而且只有在非线性情况下极限环才会出现。

系统（2.14）的定态和系统（2.1）的定态位置都相同，即$F(x)=0$，正象单摆问题一样也有不稳点的鞍点（双曲点），所以耗散系统也有产生复杂现象的局部不稳定因素。

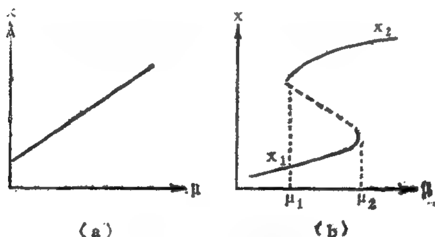
从守恒系统和耗散系统相比看，不可逆的耗散系统更具备产生复杂现象的自然条件。

§2 线性关系和非线性相互作用

事物总是相互作用的，过去我们研究问题总是习惯于线性关系。以大鱼吃小鱼为例，若是线性的话，只能有一种结果：大鱼愈来愈多，小鱼愈来愈少。这里忽略了小鱼对大鱼

的反馈作用，小鱼少了，大鱼食量不够了，因而大鱼也得减少。一个事物的演变若受到两种因素的影响，常常并非一开始就是公强我弱，中间经过若干次“较量”，生态系统要“互相依存”，这些都反应这种非线性关系。就连我们的大脑思维活动也都考虑到非线性因素，拿打靶来说，第一枪并不能打中靶心，那么我们大脑根据第一枪的结果来调整打靶时的瞄准的方式，对准的位置等，这样的不断调整过程就是一种非线性的过程。第一章谈到的湍流实质上也是非线性过程，走得慢的涡旋不让走得快的涡旋太快，走得快的涡旋则让慢的涡旋走快点。

非线性相互作用，其形态就有可能是多重的。图2.5说明状态变量x和控制参量μ在线性和非线性两种情况下的区别。



(a)线性　　　(b)非线性

图 2.5　x与μ的依赖关系

对于线性情况，每一个μ只有一个定态x与其对应，因而

它也不可能出现复杂的多重解。非线性情况则不同，当控制参数在μ_2附近时，微小的扰动很可能使状态由x_1突变到x_2，在μ_1附近时，又可能状态由x_2突变到x_1。μ在μ_1和μ_2之间时，有三种状态。多种形态是复杂现象的必备条件。下面说明常见到的物理化学模型中的非线性表现。

〔例1〕流体力学中纳维—斯托克司（Navier-Stokes）方程组的平流项，例如$u\frac{\partial u}{\partial x}$，$u\frac{\partial v}{\partial x}$，$w\frac{\partial T}{\partial z}$等都是非线性项，它仍反映物理量不均匀性（如风切变$\frac{\partial u}{\partial z}$，温度层结$\frac{\partial T}{\partial z}$等）通过风的输运造成的。若将上面表达式中的偏导数离散化，它们也可写成uu，uv，wT等形式。

〔例2〕化学反应中反应的速率和两种反应物的浓度乘积有关，如（2.9）式的右端项kc_Ac_B，

〔例3〕物理规律本身就是非线性的。例如电磁波能量随距离的平方成反比衰减；又如黑体的辐射能力和温度的四次方成正比。

〔例4〕线性的迭加原理不再成立，例如电阻R和电感L（它的阻抗数值为ωL，ω为电源频率）串联在电路中，它们合起来的阻抗数值绝不是$R+\omega L$而是$\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$。

〔例5〕耗散系统中常有正阻尼和负阻尼现象。例如阻尼项有时写成$(x^2-1)\dot{x}$或$(\dot{x}^2-1)\dot{x}$，那么速度（或位置）大于1，为正阻尼，速度（或位置）小于1为负阻尼。

〔例6〕各种周期形式的源或强迫。如$A\cdot\sin\omega t$这种项，其中A是强迫项振幅，ω是圆频率。

〔例7〕开关电路和布尔代数。晶体二极管的整流作用，实际上输入不管如何，输出只是直流一种状态，广义上说就

是开（例如用数字1表示）和关（例如用数字0表示）。在布尔代数中 0 + 0 = 0，1 + 1也可以为零，这里的0和1代表两种状态，显然这两种状态的相互作用均是非线性的。

〔例8〕自然界的很多形状并不是直线，海岸线不是直的，山是凸凹不平的，云彩更有各种奇特形状，树枝看起来也是很乱的。这些都不能用通常的规整几何来描述，后面将会看到这是一种非线性现象。

以上八例只是自然界非线性现象的一部分。只有非线性才会有复杂现象。

§3 可逆过程与不可逆过程

经典的力学所研究的都是象牛顿第二定律所描写的可逆过程，这时事物的演化只能机械地由初始条件决定。倘若如此，事物的变化只不过是过去的简单的重复和反复，因为是可逆的，“未来”和“过去”实际上并没有什么区别，有什么复杂现象可言呢？

实际上我们所观察到的复杂的自然现象，它们都是不可逆的，即“进化”的，“未来”并不完全包含在“过去”之中。物理学中首先研究不可逆现象的是热力学第二定律，它表明了时间的单向性。热量总是由高温物体单向地不可逆地流向低温物体；气体总是由高浓度向低浓度不可逆地扩散。而且找到了一个状态函数——熵S，就可以判别热力学过程的方向。热力学第二定律告诉我们，对于不允许同环境进行交换的孤立系统，熵都是不可逆地增加的，即

$$\frac{dS}{dt} \geqslant 0 \tag{2.16}$$

熵是什么？1872年波耳兹曼（Boltzmann）从分子运动论的

角度给出了科学解释。他指出，熵是分子运动混乱程度大小的一种测度。物质吸收了热，分子运动更混乱，那么熵就大一些。典型的例子是原来装在半边盒子中的气体，当中间隔板一打开，则气体就占满整个盒子（图2.6）。



图 2.6 熵增加的典型例子

因为气体由原来只占半边，现在占有整个盒子，因此气体分子更加杂乱无章地碰撞，造成混乱度增加。同时体积变大了，分子运动速度就更加分散，分子分布状态的数目增加了。熵S和分子微观状态数目Ω之间的关系为

$$S = k\ln\Omega \tag{2.17}$$

其中k是波尔兹曼常数。

微观上，分子杂乱无章的状态数目增加了，从宏观上看，该物质就显示出均匀的、无序的简单结构。

对于与环境有物质和能量交换的开放体系（象耗散系统（2.8）和（2.9）），情况就不同了。整个体系的熵的变化$\frac{dS}{dt}$为两项之和

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_iS}{dt} + \frac{d_eS}{dt} \tag{2.18}$$

其中$\frac{d_iS}{dt}$是体系内部不可逆过程所引起的熵产生，$\frac{d_eS}{dt}$为外界引入的负熵流（例如太阳供给大气以能量）。

对于孤立系统，$\frac{d_eS}{dt} = 0$，因而热力学第二定律就简化

为（2.16）式，即 $\frac{dS}{dt}=\frac{d_iS}{dt}\geqslant 0$。

对于耗散系统，由于内部耗散的特性（如扩散，热传导），它是不可逆过程，而且结果只能是分子杂乱无章排列的状态数目增加，因而有 $\frac{d_iS}{dt}\geqslant 0$，即

$$\frac{d_iS}{dt}\geqslant 0 \quad (\text{耗散系统}) \qquad (2.19)$$

但是，若有负熵流 $\frac{d_eS}{dt}<0$，因而它可以抵销一部分 $\frac{d_iS}{dt}\geqslant 0$，有可能造成

$$\frac{dS}{dt}<0 \quad (\text{开放系统}) \qquad (2.20)$$

即整个体系在演化过程中熵也可以减小，因而微观上分子运动的可能状态受到限制，有大量的分子好象受到上级的命令而比较有秩序有规则地运动（例如热对流）。从宏观上讲，体系就形成非均匀的、有序的结构，而形成的现象也必然是多样化的复杂现象。

本世纪40年代，著名物理学家薛定锷首先提出负熵的概念。他认为生命现象的基本特征就是从“环境”中取得负熵的能力。熵减小的过程必然使运动具有某种“目的”，正如一只鸟之所以现在要筑巢，是由于一个星期以后它要下蛋，这正是进化论与机械论的不同之处。

§4 封闭系统和开放系统

大家知道在热力学中曾经讨论过相变，例如水的三相冰、水、汽三者可以共存，也可以相互转变。它们和第一章介绍的一些开放系统中形态的转化有什么区别呢？汽液相

变、冰水相变等常常叫做平衡相变，因为它们发生在内部平衡条件下的封闭体系中。例如在常压下，温度若是280K，则通常是液体水，若缓慢地、均匀地冷却这一体系，使其达到273K（即0℃）这样一个平衡状态，那么水就变成固相的冰。又如一块温度为高于1044K的铁不显磁性，而均匀冷却到这个临界温度以下时就变为磁性材料。封闭系统的特点是，一个方向的通量由另一个相反方向的通量来补偿，每一个产物由相应的损失物来抵销，每一件事件通过相反的事件来消除，所以当时间反转时，该体系保持一个不变的状态。凝固和自发磁化作用，是使体系有序化的分子相互作用力和具有相反作用的分子热运动之间竞争的结果。所以平衡相变常常用增加压力（有利于分子相互作用）或降低温度（减少热噪声）来实现。

而第一章中的例子可以称为非平衡相变，这时新的形态是在有外界的物质和能量输入并且有内部的耗散下维持的。新的形态的形成必然伴随着宏观尺度上的相关，象第一章贝纳对流例子中对流现象出现时，左旋和右旋都是互相关联的，每一部分都发挥作用，参与构成整体形式，这时在平衡相变中占主导地位的分子间的（微观的）相互作用简直可以忽略。

§5 非平衡是有序之源——耗散结构

从前面几节讨论中我们可以知道，宏观上有序结构的形成必须有如下三个条件。

1.体系是开放的

正象§4所说明的，只有与外界有物质和能量交换的系统（见图2.7）才能由负熵流来补偿内部熵增加而引起的无序，

维持系统处于远离平衡的状态。

这里应该说明，对于孤立系统或近于平衡的系统，虽然系统可以有各种各样的扰动，但

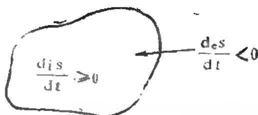


图 2.7　负熵流的作用

由于这种扰动没有能量来维持，大数定律告诉我们，这些扰动被阻尼下去，不影响物理量的平均值而整体上维持熵增加的状态。而对于远离平衡态的开放系统，在不稳定态的涨落由于有能量供给而加以放大，并驱动平均值时，最终通过与外界的物质和能量交换而生成新的结构。图2.8说明原来处于A 处的状态，由于涨落放大而越过B点到达新的状态C。所以我们也可以说是通过涨落而达到有序。



图 2.8　涨落放大由A态变成C态

2.系统处于远离平衡条件下

第一章的各种例子已经充分说明了这一点。普利高津举出过一个典型例子，两种不同的气体若无外界的热梯度作用（孤立系统），系统处于混合均匀的状态，若外界有热梯度作用，其中一种气体在热的壁处增加，而另一种气体则在冷壁处增加，形成非均匀的分布。它的熵通常要低于均匀系统的熵。

正象普利高津所说，非平衡是有序之源。

3.系统存在非线性的相互作用

在§3中，我们已经详细地说明了这一点。我们还要 指

出，若是线性，自然界只能是单调形态，图2.8中就没有A、B、C三种状态。只有非线性，事物才有多样性。非线性只有在体系处于远离平衡态条件下发挥其作用，例如当控制参数在图2.5(b)中小于μ_1或大于μ_2的很远处，那么也只能是线性情况，即近于平衡情况。

普利高津把这种在开放和远离平衡态的条件下，在与外界有物质和能量交换的过程中，通过内部非线性动力学的机制自动产生的自组织的时空结构叫做“耗散结构”（dissipative structure)。

第三章　动力系统的形态

前面两章我们扼要介绍了自然界的复杂现象及其产生的原因。本章将复杂现象通过相空间的几何直观表示，从而阐明各种复杂现象的基本类型。

§1　平衡态和相平面的概念

为了研究非线性动力系统，我们以二阶非线性常微分方程为例：

$$\ddot{x}=f(x,\ \dot{x}) \tag{3.1}$$

其中$f(x,\ \dot{x})$是作用于单位质量质点上的力，$\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$表示质点的加速度。(3.1)式中质点的位置$x$和速度$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$刻划了该系统任一时刻的状态，所以就称为相。位置$x$和速度$\dot{x}$的数值对应着平面$(x,\ \dot{x})$上的一个点，平面$(x,\ \dot{x})$叫相平面。

若令$y=\dot{x}$，则方程(3.1)化为常微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=f(x,\ y)\end{aligned} \tag{3.2}$$

方程组(3.2)的解$x(t)$，$y(t)$在相平面$(x,\ y)$上为一曲线簇，叫轨线。它定性描述了系统状态在全部运动时间（从$t=-\infty$到$t=+\infty$）内的变化，所以轨线上常用箭头表示时间t增加的方向。

方程组（3.2）的更一般的形成为

$$\begin{cases} \dot{x}=F(x,\ y) \\ \dot{y}=G(x,\ y) \end{cases} \tag{3.3}$$

由于F和G中不明显地含有时间t，故称为自治动力系统。

从物理上我们可以知道，速度$\dot{x}$和加速度$\dot{y}$为零的点，质点处于静止状况，因此方程组（3.3）右端为零，即

$$\begin{cases} F(x_0,\ y_0)=0 \\ G(x_0,\ y_0)=0 \end{cases} \tag{3.4}$$

(x_0, y_0)称为平衡点（平衡态）或奇点。

在奇点处，方程组（3.3）的解是常数$x=x_0$，$y=y_0$，因而不能定出一条随时间变化的轨线，也即奇点是没有轨线经过的。除奇点外，通过相平面上的每一点只能有一条轨线，即轨线不能相交。

既然物理系统中平衡态相当于相平面中的奇点（平衡点），因此它可以看成是未被扰动的状态。如果给系统以扰动δx和δy使其离开平衡态x_0和y_0，即令

$$x=x_0+\delta x \qquad y=y_0+\delta y \tag{3.5}$$

（3.5）式代入方程组(3.3)，并将右端泰勒展开至线性项，则得到

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

（3.6）式是扰动量δx，δy的线性方程组。其右端矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial G} \end{pmatrix}_{(x_0,\ y_0)} \tag{3.7}$$

叫雅可比（Jacobi）矩阵。

因为线性方程组（3.6）的解有$e^{\lambda t}$的形态，其中λ是雅可比矩阵的特征值。显然，若所有特征值的实部$\mathrm{Re}\lambda<0$，则平衡态是稳定的；若至少有一特征值$\mathrm{Re}\lambda>0$，则平衡态是不稳定的。以上$\mathrm{Re}\lambda\neq 0$，非线性系统（3.3）式和它相应的线性化系统的相图在平衡态附近是拓扑等价的。这种平衡态的点称为双曲点。若至少有一特征值$\mathrm{Re}\lambda=0$，此时非线性系统（3.3）的平衡态稳定性研究必须包括非线性项。

§2 常见的几种平衡态

首先我们讨论二维自治系统（3.3）和相应的线性系统（3.6）。设方程组（3.6）的非零特解为

$$\delta x=\alpha_1 e^{\lambda t}; \quad \delta y=\alpha_2 e^{\lambda t} \tag{3.8}$$

将（3.8）式代入（3.6）式便得到确定特征值λ的特征方程

$$|J-\lambda E|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}-\lambda & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{3.9}$$

或

$$\lambda^2-T\lambda+D=0 \tag{3.10}$$

其中$T=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)_{(x_0,\ y_0)}$是雅可比矩阵$J$的迹，它等于两个特征值之和，$D=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial y}-\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{(x_0,\ y_0)}$是雅可比行列式的值，它等于两个特征值之积。

由方程（3.10）解出λ为

$$\lambda_{1,2}=\frac{T\pm\sqrt{T^2-4D}}{2} \tag{3.11}$$

下面分几种情况来讨论。

1. $D<0$

由（3.11）式看出，此时λ_1和λ_2为不等实根，且有相反符号。解有一支趋向于平衡点，另一支远离平衡点，相空间的轨线如图3.1。原点称为鞍点(Saddle)。从图3.1看出，鞍点显然是不稳定的。

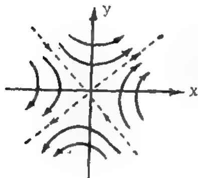
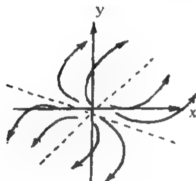


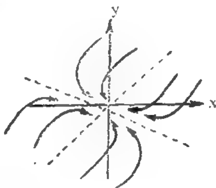
图 3.1 鞍点

2. $D>0$，$T^2-4D>0$

由（3.11）式看出，λ_1和λ_2为不等实根。当$T>0$时两根皆为正，解远离平衡点；当$T<0$时两根为负，解趋向平衡点。它们分别称为不稳定结点（node）和稳定结点，如图3.2。



a. 不稳定



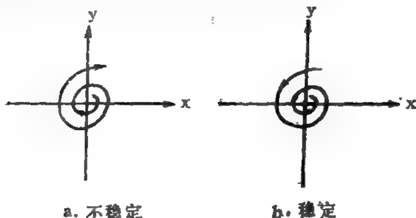
b. 稳定

图 3.2 结点

3. $D>0$，$T^2-4D<0t$

由（3.11）式看出，λ_1和λ_2为共轭复根$\lambda=\mathrm{Re}\lambda\pm i\mathrm{Im}\lambda$，解为振荡型式$e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}\cdot\cos(\mathrm{Im}\lambda t)$。当$T>0$，其实部为正，即

振幅不断增大；当$T<0$，其实部为负，即振幅不断衰减。它们分别称为不稳定焦点和稳定焦点，见图3.3。



a. 不稳定　　b. 稳定

图 3.3　焦点

4. $T=0$，$T^2-4D<0$

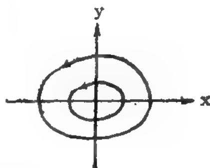


图 3.4　中心点

由（3.11）式看出，λ_1和λ_2为纯虚根，解为周期振荡型式，平衡点称为中心点（center），如图3.4。显然，中心点是稳定的。

综上所述，在参数平面（T，D）上，平衡点的情况如图3.5。

应该说明的是，方程（3.10）也是二阶方程

$$\ddot{x}-T\dot{x}+Dx=0 \tag{3.12}$$

所对应的特征方程。从物理上讲，方程（3.12）中含$\dot{x}$的项为阻尼项，Dx项为恢复力项。所以上面各种平衡态就有相应的物理意义。鞍点属于负恢复力，此时正负阻尼的形态均不改变其不稳定的形态。焦点属于正恢复力的振荡系加上正（$T<0$）负阻尼（$T>0$）的结果，到达结点时振荡消失。

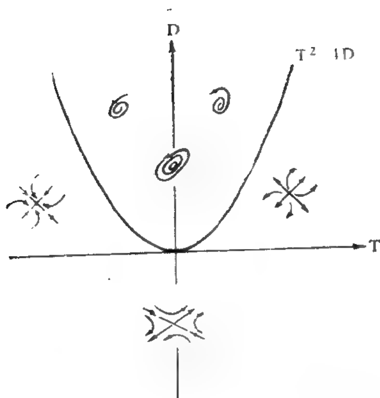


图 3.5 二维平衡点分布

中心点反应无阻尼的简谐振荡。

仿照上面的方法，同样我们也可以考虑三维自治动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) \end{cases} \tag{3.13}$$

平衡点$f_1(x_0, y_0, z_0) = f_2(x_0, y_0, z_0) = f_3(x_0, y_0, z_0) = 0$的各种类型。

若（3.13）式右端雅可比矩阵的三个特征值的实部均是

负的，那么平衡点就叫做吸引子。若三个特征值的实部均是正的，那么平衡点就叫做排斥子。三个特征值中，实部有正有负的平衡点叫做鞍点。我们把有正实部的特征值的个数叫指标（index）。因此，吸引子的指标为0，排斥子的指标为3，鞍点的指标可以是1或2，见图3.6。

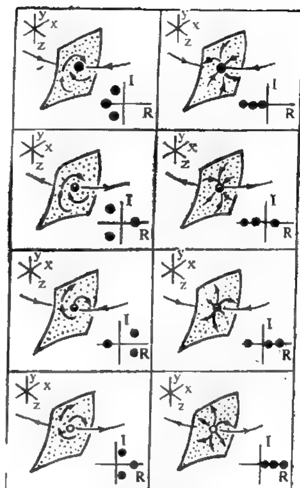


图 3.6 三维相空间中的平衡点
I和R分别为特征值的虚部和实部
第一行：指标为0的吸引子
第二行：指标为1的鞍点
第三行：指标为2的鞍点
第四行：指标为3的排斥子

§3 吸引子

我们开始讨论耗散系统。正如第二章说明的，此时相空间的体积是收缩的。例如对(3.13)式就意味着

$$\mathrm{div}\,v=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}<0 \tag{3.14}$$

在耗散系统中的整体状态用吸引子描述是比较容易的。通常有四种吸引子：定常吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和浑沌吸引子。

定常吸引子，例如二维空间中稳定的结点和焦点，它反映了状态x（或y)随时间直接衰减或振荡衰减的阻尼运动，见图3.7。

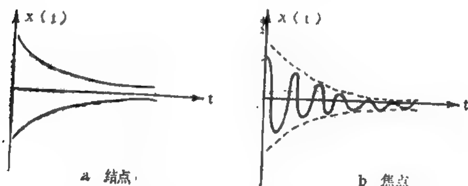


图 3.7 定常吸引子结点和焦点状态随时间的变化

周期吸引子，它反映了状态x（或y）随时间作周期运动。例如二维和三维空间中的极限环（图3.8)。



图 3.8 周期吸引子，二维和三维极限环

又如环面上的运动，环面上的元素和以局部坐标φ_1和φ_2的平面上的元素一一对应。若$\varphi_1=\omega_1 t$，$\varphi_2=\omega_2 t$，而$\frac{\omega_1}{\omega_2}$为有理数时，这就反应了环面上的周期运动，图3.9和图3.10是$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{4}$和$\frac{\omega_2}{\omega_1}=5$的两种周期解。

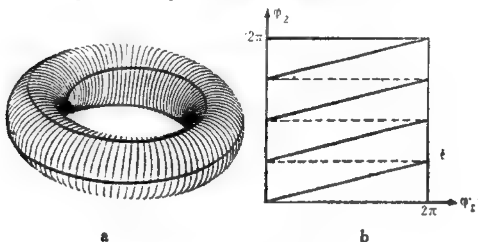


图 3.9 环面上的周期吸引子，$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1}{4}$

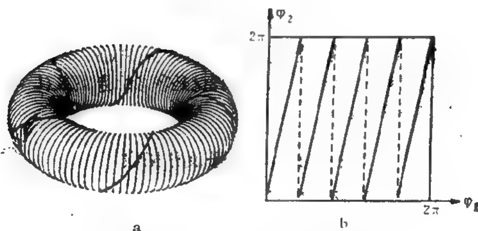
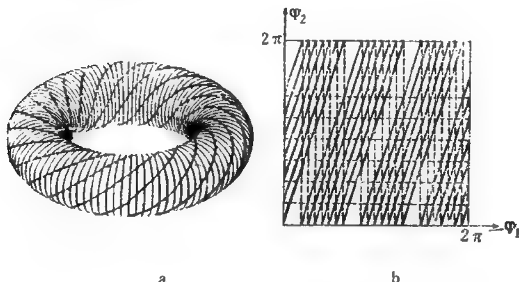


图 3.10 环面上的周期吸引子，$\frac{\omega_2}{\omega_1}=5$

当 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 是无理数时，那么在环面上和在平面上的轨迹都充满整个环面和平面，这就形成了拟周期吸引子。图3.11是 $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\pi$ 的情况。



a　　　　　　　　　　b

图 3.11　环面上拟周期吸引子，$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\pi$

三维或三维以上的另一种吸引子就是奇怪吸引子，它是将三维空间的图象经过多次伸长和折迭而形成的好象体积为零而面积为无穷大的图象。图3.12就是著名的劳伦兹(Lorenz)奇怪吸引子。

§4 多个吸引子及分型线

上节介绍了吸引子的种类，对耗散系统常有多个吸引子并存。

一维情况，常常有两个吸引点的盆被一个排斥点分开，见图3.13。

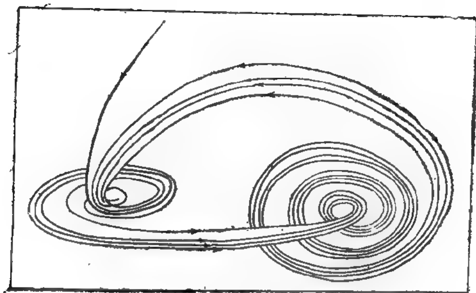


图 3.12 劳伦兹奇怪吸引子



图 3.13 两个吸引点

图中两个吸引点有它自己的吸引盆。当点稍稍偏到排斥点的左边，则最终状态就趋向于吸引子A，当稍稍偏离排斥点的右边，则趋向于吸引子B。吸引到某个吸引子的点集叫该吸引子的吸盆。图3.14为二维情况下由磁摆产生的两个吸引焦点盆。其中鞍点相当于磁摆被两个磁铁吸引力相平衡时的状态。进入鞍点的两曲线将两个吸引子分开，这就是第二章介绍的分型线（SeParatrix），阴暗区就是吸引盆。

二维情况下，也可以存在一个吸引点，另一个是吸引极限环，中间被一个排斥的极限环分开，见图3.15。

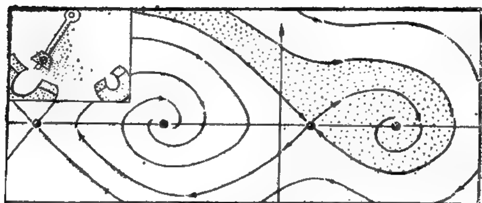


图 3.14 二维两个吸引点

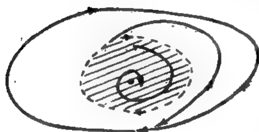


图 3.15 一个吸引点和一个吸引环并举

图中的虚线就是分型线，阴暗区就是吸引盆。

三维情况下，两个吸引点被一个分型面分开，见图3.16。其它复杂的情况这里就不介绍了。

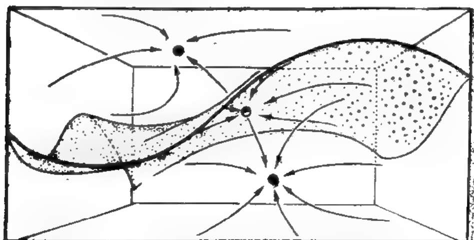


图 3.16 三维时的两个吸引子并存

§5 鞍点连接、异宿点和同宿点

相空间轨线常常可以从排斥子进入吸引子，特别可以从排斥子到鞍点或从鞍点到吸引子，也可以从鞍点到鞍点，这称为异宿轨道（或叫鞍点连接），也可以连接鞍点本身，这叫同宿轨道。

图3.17是鞍点A的不稳定流形和鞍点B点的稳定流形相交而形成的异宿轨道，其交点H即为异宿点。这种情况常常出现在空间复杂图象的横截面上。这种截面称为邦加莱（Poincare）截面，在第七章我们将详细介绍，图3.18是上下两个鞍点环的邦加莱截面上出现的鞍点连接。

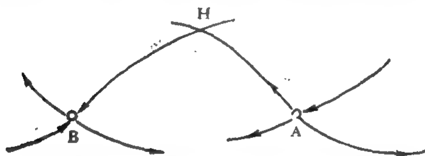


图 3.17 鞍点连接、异宿轨道

同宿轨道是鞍点的不稳定流形和本身的稳定流形相交，图3.9说明了这种情况。其交点H（可以有无穷多个）叫同宿点。这也常常出现在复杂图象的邦加莱截面上，见图3.20。

§6 结构稳定性

前面介绍的各种图象，原则上应是物理空间在相空间的表示。若给系统以小扰动，并不改变相空间的轨线形态，则

图 3.18 邦加莱截面所形成的鞍点连接

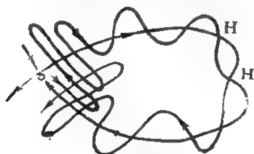


图 3.19 同宿轨道

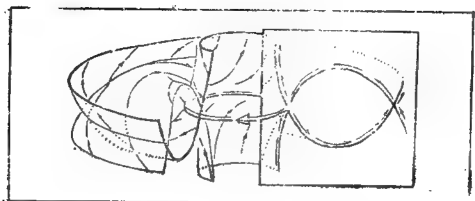


图 3.20 邦加莱截面上的同宿点

称是结构稳定的系统。

图3.21是吸引焦点加上一个弱的向外扰动，仍产生一个较弱的吸引焦点，因而是结构稳定的系统。

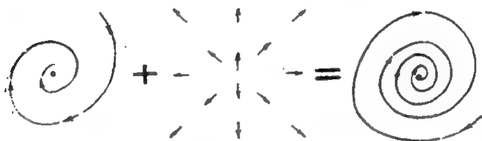


图3.21 结构稳定的系统

图3.22是中心点扰动成吸引焦点或排斥焦点，所以说守恒系统的中心点是结构不稳定的。

前面介绍的鞍点连接也是结构不稳定的。见图3.23。

显然，只有结构稳定的系统在物理上才是可以实现的，所观察到的形态也是可以重复出现的。

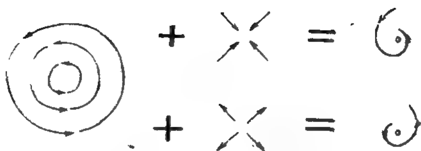


图 3.22 结构不稳定的系统

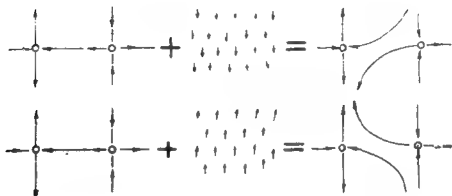


图 3.23 结构不稳定的鞍点连接

§7 非游荡点集

在耗散系统中我们常研究轨道的终结状态，而不研究它们的暂瞬状态。因此，如果在相空间中取一小的圆，其中心有一点，这小圆随着时间开始游荡，且绝不回来与它原来的位置交叠，那么圆盘的中心点叫游荡点。如果这圆盘仍与原来位置交叠，那么圆盘的中心点即为非游荡点。其情形如图3.24和图3.25。图3.25中的小圆被紧束在中心。显然，平衡点吸引子都是非游荡集。

图3.26是极限环集，此时小圆环的中心一次又一次保持通过初始点，这是非游荡集。

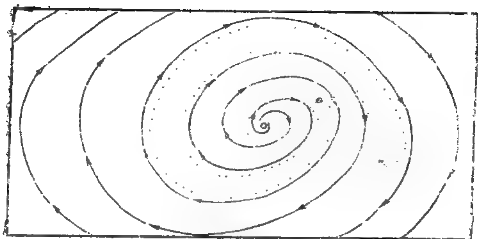


图 3.24 游荡集

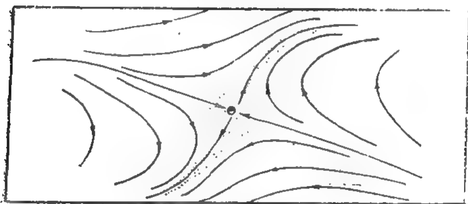


图 3.25 非游荡集

在环面上的周期或拟周期吸引子（如图3.9，3.10，3.11）都是非游荡集。象图3.19的同宿轨道也是非游荡集。

概括说，非游荡集究竟呈现什么样的景象呢？它可以是一些平衡点，或是一些周期轨道，也可以是平衡点与周期轨道的混合物，也还可以复杂得从外表看起来象流体运动中有时出现的各种大大小小的涡旋，或象天空中有时出现的伸展到四面八方的片片小白云，而每一个这样的小涡旋或小片片



图 3.20 极限环非游荡集

实际上又充满了无数的丝样的轨线簇，互相牵连或互相缠绕。

§8 四种吸引子的功率谱特征

前面介绍了四种吸引子的形态特征。很多实际问题中常常只给出观测到的离散的时间序列（其时间间隔为Δt）

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n \tag{3.15}$$

如何从时间序列中提取这四种吸引子的不同形态的信息呢？

大家知道，可以对x_j作富里埃变换

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} x_j e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \tag{3.16}$$

其频率间隔为$\Delta f = \frac{1}{n\Delta t}$。$\hat{x}_k$的逆变换为

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k e^{i\frac{2\pi kj}{n}} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \tag{3.17}$$

其中$i=\sqrt{-1}$为纯虚数。

这种变换不具有欧氏长度$\sum_j x_j^2$的守恒性，但具备哈密顿（Hamilton）长度的守恒性，即

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x_k}|^2 \tag{3.18}$$

时间序列x_j的自相关函数为

$$\psi_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+m} \tag{3.19}$$

而自相关函数的富氏变换，即为功率谱$|\widehat{x_k}|^2$

$$S_k = |\widehat{x}_k|^2 = \sum_{m=0}^{n} \psi_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{n}\right) \tag{3.20}$$

它的意义是代表单位频率上的能量。图3.27是时间序列及其相应的功率谱。由于$|\widehat{x}_k|^2 = |\widehat{x}_{n-k}|^2$，所以功率谱对垂直线$f = \frac{1}{2f_{max}}$是对称的，所以其有效信息的频率范围是从0到$\frac{1}{2\Delta t}$。

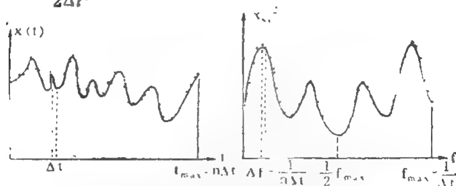


图 3.27　时间序列(左)及其功率谱(右)

从功率谱上对周期函数、拟周期函数和非周期函数是容易区分的。首先对周期吸引子（包括定常吸引子），它的功率谱是分立的，离散的。它包括基频$f_0 = \frac{1}{T}$（其中T是时间序

列的周期）和它的谐波$\frac{2}{T}$，$\frac{3}{T}$，$\frac{4}{T}$……或它的分频$\frac{f_0}{2}$，$\frac{f_0}{3}$，$\frac{f_0}{4}$，……。图3.28是周期1，周期2及周期4的形态和它们的功率谱。而对拟周期函数，它包含各式各样的周期（或频率），且它们之间的比例是无理数。例如含两个频率f_1和f_2的拟周期函数（f_1/f_2是无理数），则它的功率谱也是分立的、离散的，但除了包含频率f_1和f_2外，还包括由于非线性相互作用而产生的频率$m_1f_1+m_2f_2$（m_1和m_2是任何整数），因此谱线并不象周期函数那样以其间隔的频率分立。图3.29是含f_1和f_2的拟周期函数的功率谱。

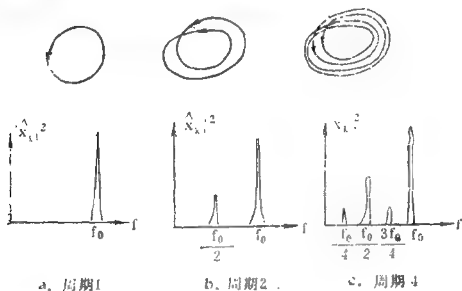


图 3.28 周期函数和它们的功率谱

对于非周期函数，我们要区分随机的白噪声和确定性的随机（即浑沌）。白噪声是由大量独立的因素产生的，因而其功率谱的振幅和频率无关，即没有任何声音的谐波结构，



图 3.29　拟周期函数的功率谱

ⓐ: f_2-f_1　ⓑ: $3f_1-f_2$　ⓒ: f_1+f_2　ⓓ: $3f_1$
ⓔ: $5f_1-f_2$　ⓖ: $3f_1+f_2$　ⓗ: $5f_1$　ⓘ: $7f_1-f_2$
ⓙ $5f_1+f_2$

所以功率谱是连续的平谱。而对于浑沌，它的功率谱是连续的，但不是平谱，见图3.30。

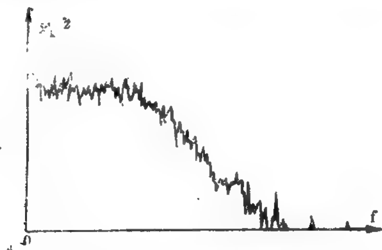


图 3.30　浑沌的功率谱

第四章　分　岔

从前面三章我们已经知道，物理、化学、生物等系统状态演变的共同特点是，它们将导致多样化和增加复杂性。即当系统的控制参数变化时，新的定常状态解、周期解、拟周期解或浑沌解会分岔出来。这些多样化的形态均是由非线性方程（代数方程、常微分方程、偏微分方程等）控制的，而且它们又是靠外界进入系统的能量来维持的，前面把这种多样化的形态统称为耗散结构。

§1　数学物理中的分岔现象

除了第一章介绍的几个例子说明复杂现象是经过几次分岔过程导得的。现在再介绍几个例子。

〔例1〕欧拉杆在轴向压力变化时引起的弯曲问题。

这是著名科学家欧拉在1744年所研究的一个问题。一个均匀杆的一端受到一个压力μ（控制参数）的作用，当压力μ较小时，杆保持直线平衡状态，若用θ表示杆的切线和实轴之间的夹角，则当μ小时，$\theta=0$。但是当压力μ超过一临界值（可以证明这个临界值为π^2）时，原有的平衡状态失去稳定性，而发生杆的弯曲，这就是新的平衡态。见图4.1和图4.2。

这个问题的数学描述是解下列非线性方程的边值问题

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+\mu\sin\theta=0\\ \dot{\theta}(0)=0,\ \dot{\theta}(1)=0\end{cases}\tag{4.1}$$



图 4.1 欧拉杆

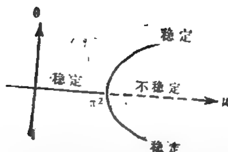


图 4.2 μ超过π^2时杆的分岔

显然（4.1)式表征的是一个特征值问题，其相应的线性问题可表示为

$$\ddot{\theta} + \mu\theta = 0$$
$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\theta}(1) = 0 \tag{4.2}$$

从（4.2）式很易分析得到，当μ不是特征值时，(4.2)式为零解$\theta = 0$，它代表杆未弯曲的状态。只有当μ为特征值时（很易证明π^2是一个特征值）．(4.2)式才有非零解$\theta \neq 0$，它代表弯曲的状态。图4.2是状态θ和μ的关系示意图，从图上看出，当$\mu > \pi^2$后，原有的$\theta = 0$状态发生不稳定，而分岔出稳定的弯曲状态$\theta \neq 0$，当然杆究竟向那一边弯，这很大程度上决定于初始扰动（涨落)。

〔例2〕双星裂变理论。这个问题是从1687年牛顿发表有关地球形状的理论而开始的。地球到底是长椭球（东西扁）还是扁椭球（南北扁)？卡西米（Cassimi)认为是东西扁，而牛顿认为是南北扁。

大家知道，若地球不转动（自转)时，则是圆球，即三个半轴相等$a = b = c$，而当地球自转时则是扁的。为此我们用角动量μ表示控制参数，当μ较小时，麦克劳林在1742年用非线性理论论证了牛顿的看法，即地球是一个南北扁的扁球

$(a=b>c)$，称为麦克劳林椭球。到1834年雅可比论证，当μ超过0.384436时，麦克劳林椭球就变成不稳定而分岔出一个雅可比椭球$(a>b>c)$。1883年汤姆孙(ThomPson)和泰特(Tait)又论证，当角动量再增加，雅可比椭球又不稳定就分岔出中间薄两头厚的梨形球。这就导致邦加莱猜想，认雅可比椭球到梨形球是双星产生的原因，有关这个问题直到目前还在研究。

〔例3〕旋转流体——泰勒涡旋问题。除了第一章介绍的贝纳对流、卡曼涡街问题而外，流体力学中分岔的问题还有泰勒涡旋问题。粘性不可压缩流体处在两个同轴圆柱之间，见图4.3。内柱以常角速度ω旋转，外柱静止。我们以角速度ω或相应的雷诺数$Re=\frac{\omega(R_2-R_1)R_1}{\nu}$作为控制参数($R_1$和$R_2$分别为内柱和外柱的半径，$\nu$是流体粘性系数)。当$\omega$(即Re数)较小时，流体运动是定常的圆轨道的库特(Couettle)流。当ω超过一临界值后，则在垂直方向上有周期运动，这就是泰勒涡旋(见图4.4)，它迭加在库特流上。当ω再增加，就会分岔出波状涡旋，它在时间上和垂直方向上都是周期性的。当ω进一步加大，实验已经证实会出现非周期运动。

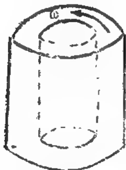
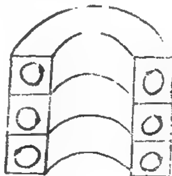


图 4.3 同轴圆柱


图 4.4 泰勒涡旋

〔例 4〕一个结实的环悬挂在天花板上，并且一个小球静止在环的底部，环围绕通过环中心的垂直轴以角速度ω旋转。当ω较小时，小球静止在环的底部，小球是稳定的(见图4.5(a))。但当ω超过某一临界值ω_0后，小球滚出环的底部(见图4.5(b))。至于小球滚到左边还是右边，这要看小球最初偏离垂直轴到哪一边。小球处在新的位置可以看作是小球原有位置(底部)失去稳定性而分岔出来的。

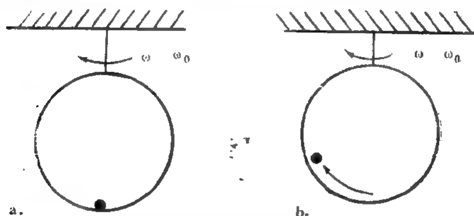


图 4.5 环旋转时小球位置的变化

若把图4.5中的环改成一个空心球，则$\omega<\omega_0$时小球处在球的底部，当$\omega>\omega_0$此时小球滚出球的底部，且在空心球内作圆周运动，见图4.6。小球由静止的平衡态变成周期态，这就是我们下面要讨论的霍夫(HoPf)分岔(或叫复分岔)。

这些例子都是来自不同的科学领域，但有一个共同的特点，它们是由一组耦合的常或偏微分方程组来描述(尽管有些例子并未列出方程式，象例3满足流体力学中的纳维—斯托克司方程)。方程组中包含一个或几个控制参数(如雷诺

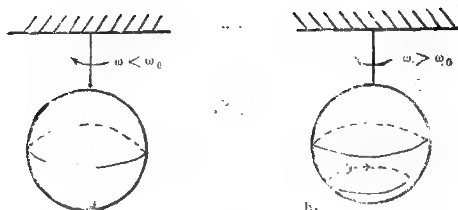


图 4.6 小球由静止变为周期运动

数），随着参数的变化，系统可以有定常状态，周期状态，拟周期状态和浑沌（非周期）状态。这些状态不断演化，交替出现，就构成事物演变的多样性和复杂性。

§2 实分岔点和极限点

设动力系统的形态用带控制参数 α 的微分方程。

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\alpha) \tag{4.3}$$

来描述。其中x是状态变数向量，α是控制参数，方程(4.3)的右端不明显地含有时间t，因而是自治动力系统。

在应用中通常将动力系统分成两种类型。第一种类型向量x是有限维的，称为集总参数系统，它常以n个一阶常微分方程组来描述；第二种类型，向量x是无限维的，称为分布参数系统，它常以抛物型偏微分方程组来描述。

方程（4.3）的定常状态解，即第三章中叙述的平衡态，可以认为时间很长以后，状态稳定下来不随时间变化，故

$$f(x,\alpha)=0 \tag{4.4}$$

为了求出由（4.4）式确定的定常状态解，对集中参数系统要解非线性代数方程组，对分布参数系统，要解常微分方程组或椭圆型偏微分方程组的非线性边值问题。

本章的中心任务是从定常状态解开始的各种形态解的转化，这就要研究解的稳定性变化以及解的个数的变化两个问题。为此我们介绍几个基本术语。

我们以一维动力系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ \alpha) \tag{4.5}$$

为例。方程（4.5）的定常状态解满足

$$f(x,\ \alpha)=0 \tag{4.6}$$

从第三章我们知道，定常状态解从力学上讲是速度和加速度等于零的点，即在该点相应的外力f为零。

现在将力f表示成位势V的梯度

$$f=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{4.7}$$

那么（4.6）式就意味着定常状态解满足

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{4.8}$$

从数学上讲，$\frac{\partial V}{\partial x}=0$意味着不满足隐函数定理。因为若$\frac{\partial V}{\partial x}\neq 0$，则该点的力沿$V$的切线方向就有非零分量，这称为满足隐函数定理，见图4.7。所以说定常状态解(或平衡态)一定满足（4.8）式，或不满足隐函数定理。

关于平衡点的稳定性，据(3.6)式由雅可比矩阵的特征值决定，对问题（4.5），雅可比矩阵就是一个元素$\frac{\partial f}{\partial x}$，因

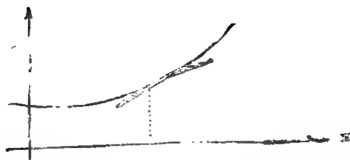


图 4.7 满足隐函数定理

而它就是特征值，且是实数。因此$\frac{\partial f}{\partial x}<0$时平衡态是稳定的，$\frac{\partial f}{\partial x}>0$时平衡态是不稳定的，故在

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{4.9}$$

处平衡点由稳定变成不稳定，该点称为实分岔点。由于在分岔点处x和参数α的关系不是唯一的，故有

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \tag{4.10}$$

所以说实分岔点满足（4.9）式和（4.10）式。有时实分岔点也称退化临界点或非莫尔斯（Morse）临界点。在实分岔点处有两条具有不同切线$\frac{dx}{d\alpha}$的解分支曲线（4.6）通过，见图4.8中点2。

另一种平衡点叫极限点，解通过该点时个数发生变化。该点满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}\neq 0 \tag{4.11}$$

（4.11）式中的第一式是由于该点解分支不满足唯一性。

由于该点处 $\frac{d\alpha}{dx}$ 改变符号，并且有唯一关系α（x）成立，即 $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \neq 0$，即在极限点处相汇合的两个分支有一极限"切线" $\frac{d\alpha}{dx} = 0$，见图4.8中点1。

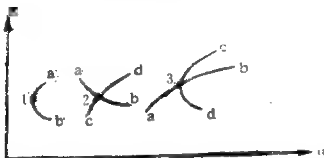


图 4.8 解图 1.极限点，2.分岔点，3.分岔极限点。

有时解的平衡点既是极限点又是分岔点，则称为分岔极限点，如图4.8中的点3。图4.8中的曲线ab，cd代表解的分支。

方程（4.3）的定常解x依赖于α的全部图象就叫做解图，图4.8是解图的一段。

有时系统（4.3）中含有多个控制参数，例如α和β，这时对每一个固定的β，我们就能够找出分岔点和极限点。这样在参数平面"α—β"上就找出了分岔点曲线α（β），这种分岔点和参数的依赖关系，叫做分岔图、如图4.9。

从分岔图上我们再次看出，分岔点曲线确定了解的稳定性变化，该线的两边解的拓扑结构是完全不同的，即经过分岔点发生了结构不稳定，而极限点曲线确定了解的个数的变化。

有时系统（4.3）中的参数α是随时间变化的，即$\alpha(t)$，

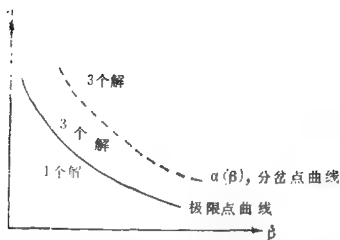


图 4.9 分岔图

那么此时解的形态就连续变化。解的某个特征量（例如解的模数 $\|x\|$）随 α（t）而变化的图就叫做演化图，图 4.10是演化图的一个例子。应该指出，在演化图上仅仅稳定的解是连接着的（如图中实线）。

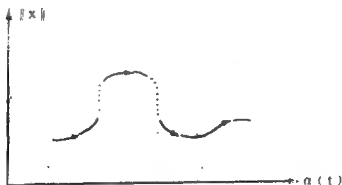


图 4.10 演化图

§3 分岔的三种基本原型

从前面我们看出，动力系统中若控制参数 μ（或者 α）发生变化时，引起雅可比矩阵(有时称导算子）的特征值的双曲

性破坏（如有的特征值的实部为零），发生结构稳定性的变化，这就是分岔。如果从雅可比矩阵的特征值λ的角度看，参数μ变化时，通过$Re\lambda=0$的情况可能有三种过程发生：

1.特征值沿复平面（$Re\lambda$，$Im\lambda$）的实轴穿过虚轴。

2.特征值沿复平面的上方或下方穿过虚轴。

3.特征值沿复平面的实轴两边而趋向虚轴。

这三种过程都引起$Re\lambda=0$，即参数μ变化时，$Re\lambda=0$的前后稳定性不同，拓扑结构形态不同，即发生分岔。这三种过程λ演变的示意图如图4.11。它们分别称为叉型(Pitchfo-

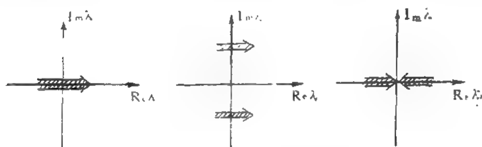


图 4.11 分岔的三种类型

rk）分岔、霍夫分岔和鞍—结点分岔（或切分岔）。第一、第三种叫实分岔，第二种叫复分岔。无论哪一种，在分岔点处都应有

$$\frac{d[Re\lambda(\alpha)]}{d\alpha}\neq 0 \qquad (4.12)$$

现在回忆一下第三章的图3.5，实际上在$T=0$处和$D=0$处分别发生霍夫分岔和鞍—结分岔。现在分别用例子说明：

1.叉型分岔

其典型方程为

$$\dot{x}=\mu x-x^3=x\ (\mu-x^2)\equiv f\ (x,\ \mu) \qquad (4.13)$$

方程（4.13）的平衡态是

$$\begin{cases} x=0, & \text{当}\mu<0 \\ x=0 \text{ 和 } x=\pm\sqrt{\mu}, & \text{当}\mu>0 \end{cases} \tag{4.14}$$

平衡态的稳定性由雅可比矩阵

$$J=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\text{平衡态}}=\left.\mu-3x^2\right|_{\text{平衡态}} \tag{4.15}$$

的特征值决定。因为此时J是一个元素，所以J的特征值是（4.15）式。

就平衡态$x=0$而言，当$\mu<0$时$\lambda=\mu<0$，因而平衡态$x=0$稳定；当$\mu>0$时$\lambda=\mu>0$，因而平衡态是不稳定的。

就平衡态$x=\pm\sqrt{\mu}$（$\mu>0$）而言，$\lambda=-2\mu<0$，因而平衡态$x=\pm\sqrt{\mu}$在$\mu>0$是稳定的。

因此μ由负变为正时，特征值λ沿实轴穿过虚轴，状态$x=0$则由稳定变成不稳定，并分岔出新的平衡态$x=\pm\sqrt{\mu}$。这就是叉型分岔，见图4.12。图中点（$\mu=0$，$x=0$）显然是分岔点，因为它符合（4.9）式和（4.10）式，即

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \mu=0}}=\left.\mu-3x^2\right|_{\substack{x=0\\ \mu=0}}=0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{\substack{x=0\\ \mu=0}}=\left.x\right|_{\substack{x=0\\ \mu=0}}=0 \end{cases} \tag{4.16}$$

图中实线表示稳定的平衡态，虚线表示不稳定的平衡态。

因为问题（4.13）是一维情况，所以可以写成位势形式

$$\dot{x}=\mu x-x^3=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{4.17}$$

其中位势

$$V=\frac{1}{4}x^4-\frac{\mu}{2}x^2 \tag{4.18}$$

它在$\mu<0$和$\mu>0$的示意图见图3.13。从图4.13和图4.12（a）比较看出，位势V（x）的极小值相

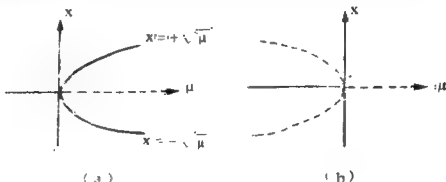


图 4.12　叉型分岔　(a)超临界，(b)亚临界

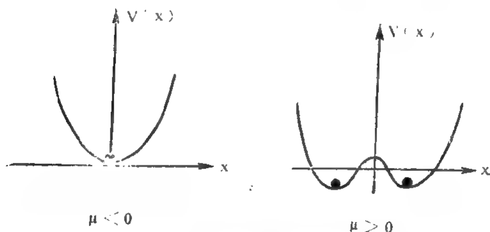


图 4.13　位势$V(x)$示意图

应于稳定的平衡态，位势V（x）的极大值相应于不稳定的平衡态。

典型方程（4.13）若变成

$$\dot{x}=\mu x+x^3 \tag{4.19}$$

则分岔图就是图4.12(b)。

图4.12(a)，(b)分别叫超临界分岔和亚临界分岔。若$\mu<\mu_c$（μ_c为临界参数）时，平衡态的一分支是稳定的，但到了$\mu=\mu_c$时变成不稳定的平衡态，且新的平衡解分支在$\mu>\mu_c$是稳定的，则叫超临界分岔，若新的平衡态分支解在$\mu<\mu_c$时是不稳定的，则叫亚临界分岔。

2. *霍夫分岔*

其典型例子是

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu-(x^2+y^2)] = f_1(x,y) \\ \dot{y} = x + y[\mu-(x^2+y^2)] = f_2(x,y) \end{cases} \tag{4.20}$$

显然$x=0$，$y=0$是一个平衡态，它的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,\ 0)}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

它的特征值是共轭复根

$$\lambda = \frac{1}{2}(2\mu \pm 2i) = \mu \pm i \tag{4.22}$$

由(4.22)式看出，当参数μ由负变到正时，λ沿实轴上方和下方穿过虚轴，(0，0)则由稳定的平衡态（吸引子）变成不稳定的平衡态（排斥子），究竟分岔出什么形态呢？将方程组(4.20)化为极坐标形式

设
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{4.23}$$

则

$$\begin{cases}\dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(\mu - r^2) = f(r,\ \mu) \\ \dot{\theta} = \dfrac{\dot{x}y - \dot{x}y}{r^2} = 1\end{cases} \tag{4.24}$$

方程组(4.24)的第二式说明，轨线以一常角速度旋转。而方程组(4.24)第一式说明，极坐标系中在$\mu>0$还有另一平衡态

$$r = \sqrt{\mu} \tag{4.25}$$

由于(4.24)式和叉型分岔(4.13)式非常相似，故很易分析出，$\mu<0$时$r=0$是稳定的焦点，$\mu>0$时就变成不稳定焦点，而分岔出半径为$\sqrt{\mu}$的极限环(4.25)式。这种分岔叫霍夫分岔。其分岔图见图4.14(a)。(4.25)式说明$(x,\ y)$坐标系中的极限环变成极坐标系中的平衡态，$(x,\ y)$坐标系中霍夫分岔成为极坐标中的叉型分岔。所以按(4.16)式，点$(x=0,\ y=0,\mu=0)$是一个霍夫分岔点(虽然它已是复分岔)。

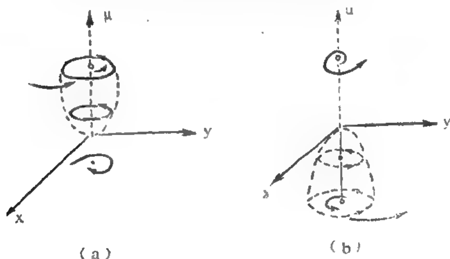


图 4.14　霍夫分岔图。(a)超临界，(b)亚临界

方程组(4.20)若变成

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x[\mu + (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu + (x^2 + y^2)]\end{cases} \tag{4.26}$$

其分岔图见4.14(b)，图4.14(a)(b)分别称为超临界霍夫分岔和亚临界霍夫分岔。(4.22)式表明，霍夫分岔是复分岔。

3.鞍—结分岔(切分岔)

其典型方程为

$$\begin{cases}\dot{x} = \mu + x^2 \\ \dot{y} = +y\end{cases} \tag{4.27}$$

从(4.27)式看出，当$\mu<0$时平衡态是$(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$，它的雅可比矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}_{(+\sqrt{-\mu},\ 0)}$$

$$= \begin{pmatrix} +2\sqrt{-\mu} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

因而J的特征值是$\lambda_1 = \pm 2\sqrt{-\mu}$，$\lambda_2 = \pm 1$。故特征值符号相同时代表结点，符号相反时代表鞍点。但到达$\mu = 0$时平衡态结点和鞍点合并成一个，即(0, 0)，到$\mu>0$时却无平衡态。即μ由负变到正时，λ沿实轴两边趋向虚轴，这是鞍—结点分岔，见图4.15。显然点($x=0$，$y=0$，$\mu=0$)是分岔点，这是因为将分岔点条件(4.9)，(4.10)式推广到二维即为

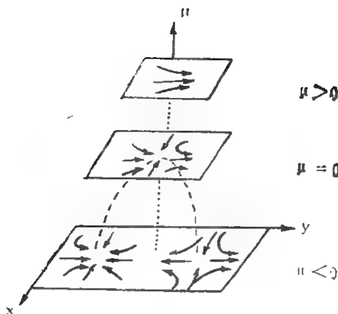


图 4.15 鞍一结点分岔

$$\det J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}_{\text{分岔点}}=0,$$

$$\det\overline{J}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha}\end{vmatrix}_{\text{分岔点}}=0 \qquad (4.29)$$

对问题(4.27)，上式的两个行列式为

$$\det J=\begin{vmatrix}2x & 0\\ 0 & \pm 1\end{vmatrix}_{\substack{x=0\\ y=0\\ \mu=0}}=0,$$

$$\det\overline{J}=\begin{vmatrix}2x & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}_{\substack{x=0\\ y=0\\ \mu=0}}=0$$

它们满足(4.29)式。

对n维自治动力系统

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n,\ \alpha),\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \tag{4.30}$$

实分岔点，应满足

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ \alpha)=0,\ i=1,2,\cdots\cdots n \tag{4.31}$$

和

$$\begin{cases}\det J(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ \alpha)=0\\ \det \bar{J}(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ \alpha)=0\end{cases} \tag{4.32}$$

其中$\bar{J}$的元素是J的最后一列用$\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha}\right\}$代替。

对极限点应满足(4.31)式及

$$\begin{cases}\det J\ (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ \alpha)\ =0\\ \det \bar{J}\ (x_1,x_2,\cdots\cdots x_n,\ \alpha)\neq 0\end{cases} \tag{4.33}$$

除了前面讨论的超临界分岔、亚临界分岔以外，还有一种叫跨临界分岔。它的典型例子是

$$\dot{x}=\mu x-x^2=x(\mu-x) \tag{4.34}$$

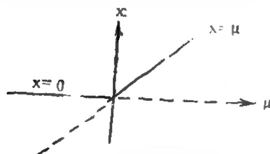


图 4.16　跨临界分岔

方程(4.34)在$\mu<0$和$\mu>0$都有两个平衡态$x=0$和$x=\mu$。很容易验证平衡态$x=0$在$\mu<0$稳定，而在$\mu>0$不稳定，相反平衡态$x=\mu$在$\mu<0$不稳定，而在$\mu>0$稳定。这只

是稳定性通过分岔点而交换，但形态并未变化，这种分岔叫跨临界分岔，见图4.16。

§4 较为复杂的分岔

上节中的分岔是三种基本原型。实际问题中的分岔则比较复杂。下面举一些例子。

在叉型分岔原型(4.13)中右端若多一个常数$p>0$，即

$$\dot{x}=\mu x-x^3+p \tag{4.35}$$

式中p叫缺陷参数，此时平衡态满足

$$x^3-\mu x-p=0 \tag{4.36}$$

这时解图为图4.17。从图4.17看出，由于有小的p，使解的分支平滑地过渡到新的分支解（偏向一边）。这叫有缺陷的分岔。因为若欧拉杆无缺陷，那么压力μ增加后既可能弯向左边或弯向右边，而当欧拉杆有缺陷后($p\neq0$)则μ增加后，杆只能向一边弯曲，见图4.18。看来有缺陷的分岔更符合实际的情况。

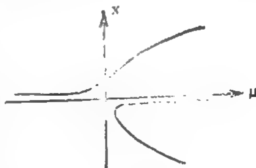


图 4.17 有缺陷的分岔

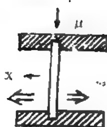
在叉型分岔原型(4.13)中的右端若多一个二次项，即

$$\dot{x}=\mu x-x^3+2\alpha x^2 \tag{4.37}$$

方程(4.37)的平衡态有三个

$$x=0,\quad x=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\mu} \tag{4.38}$$

显然后面两个解只有在$\mu\geqslant-\alpha^2$存在，(4.38)式的解见图4.19。由于方程(4.37)中包括有二次项$2\alpha x^2$，因而在分岔点($\mu=$



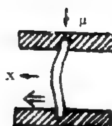


图 4.18 无缺陷分岔(a)和有缺陷分岔(b)

0，$x=0$)处有类似于(4.34)式的跨临界分岔性质，而且和有缺陷的分岔(图4.17)仅有很微小的差别。还要看到，当μ值由较大的负值变到正值时，在$\mu=0$处发生分岔，由$x=0$的解分支变到(4.38)式的另一个解分支，但当μ值由正值中的$x>0$的解分支变到$\mu<0$时，则在点($\mu=-\alpha^2$，$x=\alpha$)处突跳到解分支$x=0$。这就是滞后现象。

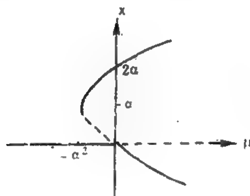


图 4.19 有滞后的跨临界分岔

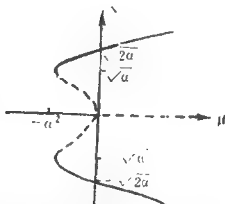


图 4.20 有滞后的亚临界分岔

在叉型分岔原型(4.13)的右端若多出一个5次项，则方程为

$$\dot{x}=\mu x+2\alpha x^3-x^5 \tag{4.39}$$

当$\alpha>0$时，而且接近分岔点处，此时(4.39)式中的五次项不重要，方程(4.39)的形态类似于图4.12(b)的亚临界分岔。方程(4.39)有平衡态$x=0$和由下式

$$x^4-2\alpha x^2-\mu=0 \tag{4.40}$$

定义的平衡态。其解见图4.20。从图上看出，这里不但有滞后现象，而且还有突跳发生。

将霍夫分岔原型方程(4.24)右端加上5次方项得

$$\begin{cases} \dot{r}=\mu r+2\alpha r^3-r^5 \\ \dot{\theta}=1 \end{cases} \tag{4.41}$$

就可以得到有滞后的亚临界霍夫分岔，见图4.21。从图4.21看出，它非常类似于图4.20。因此缓慢增加μ时，定常状态(焦点)解可以突变成极限环，反之，μ减少时稳定的极限环可以突然消失，“变成”和“消失”极限环的位置不同，这就是滞后。

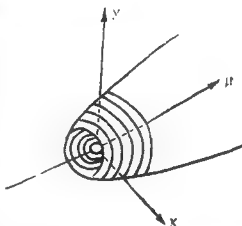


图 4.21　有滞后的亚临界霍夫分岔

从带滞后的亚临界叉型分岔(图4.20)和亚临界霍夫分岔(图4.21)看出，当控制参数$\mu<\mu_c$时，若扰动比较小则是稳定的，趋向于$x=0$(或$r=0$)解。但若扰动比较大，则产生不稳定，而趋向于另一平衡态分支(4.40)或另一极限环分支。这种亚临界分岔是流体产生湍流的方式之一。

§5　定常状态解及其稳定性

根据第三章 §1的讨论，n维自治动力系统(4.30)定常

状态解的稳定性，由雅可比矩阵

$$J = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{\text{平衡态}} \tag{4.42}$$

的特征值决定。下面举例说明。

〔例1〕 $\ddot{x} = \sin x(a\cos x - 1)$， $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\tag{4.43}$$

此例是一个守恒系统，据第三章分析，其平衡态只能是稳定的中心或不稳定的鞍点。

令 $\dot{x} = y$，则方程 (4.43) 化为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x(a\cos x - 1) \end{cases} \tag{4.44}$$

从 (4.44) 式看出，系统的平衡态为

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{a} \\ y = 0 \end{cases} \tag{4.45}$$

第一个平衡态就是($x = 0$, $y = 0$)，第二个平衡态只能在 $a > 1$ 时存在。方程组 (4.44) 的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

对平衡态 (0, 0)，(4.46)式为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

雅可比矩阵(4.47)的特征值为

$$\lambda^2 = a - 1 \tag{4.48}$$

因此 $a < 1$ 时，λ 为纯虚根，平衡态(0,0)是稳定的中心；$a >$

1时，λ有正负两根，平衡态 (0，0)是不稳定的鞍点。对平衡态$(\cos^{-1}\frac{1}{a}, 0)$，雅可比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a}-a & 0 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

它的特征值为

$$\lambda^2=\frac{1}{a}-a \tag{4.50}$$

故$a>1$时，该特征值为纯虚根，平衡态为稳定的中心，见图4.22。从图4.22看出，这是典型的叉型分岔，$a=1$，$x=0$的点为分岔点。

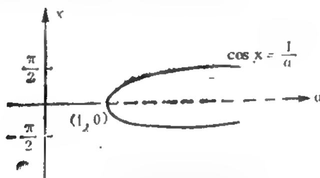


图 4.22 系统(4.43)式解图

〔例2〕 范德堡 (Van der Pol)方程

$$\ddot{x}+a(x^2-1)\dot{x}+x=0 \qquad (|a|<2) \tag{4.51}$$

令$\dot{x}=y$，则方程(4.51)化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x+ay-ax^2y \end{aligned} \tag{4.52}$$

显然(4.52)式有定常状态解(0, 0)，它的雅可比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

特征方程为

$$\lambda^2-a\lambda+1=0 \tag{4.54}$$

故特征值λ为

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4}\right) \tag{4.55}$$

因此，$a<0$时，λ为共轭复根，且实部为负，(0，0)是稳定焦点；$a>0$时，λ为共轭复根，且实部为正，(0，0)是不稳定焦点。

在$a=0$处，

$$\frac{d[\mathrm{Re}(\lambda)]}{da}=\frac{1}{2}\neq 0 \tag{4.56}$$

因而满足条件（4.12）。故$a=0$是一个霍夫分岔点。a由负到正时，在$a>0$分岔出一个稳定的极限环。

〔例3〕
$$\begin{cases}\dot{x}=y \\ \dot{y}=x-x^2+ay\end{cases} \tag{4.57}$$

方程组（4.57）有两个定常解（0，0）和(1，0)，(4.57)式的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{对于}(0,\ 0) \tag{4.58}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{对于}(1,\ 0) \tag{4.59}$$

（4.58）和（4.59）式的特征值分别是

$$\lambda=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2} \tag{4.60}$$

$$\lambda=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2} \tag{4.61}$$

由（4.60）式看出，λ是实根且一正一负，因而（0，0）是鞍点，Re(λ)不会穿过虚轴，所以不会发生分岔。但是对点（1，0），其形态随α变化如下，

$$\begin{cases} \alpha<-2 & \text{稳定结点} \\ -2<\alpha<0 & \text{稳定焦点} \\ 0<\alpha<2 & \text{不稳定焦点} \\ \alpha>2 & \text{不稳定结点} \end{cases} \tag{4.62}$$

所以看出$\alpha=0$处，λ沿实轴上下方穿过虚轴，发生霍夫分岔。

以上只是几个简单的例子。一般求系统（4.30）的所有定常解是困难的。通常我们只有用解非线性代数方程（或超越方程）的牛顿方法。该方法首先找出定常状态解的第k次估计值$x^{(k)}$，其次对$x^{(k)}$加以修正$\Delta x^{(k)}$，得到新的估计值$x^{(k+1)}$，即

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\varepsilon\Delta x^{(k)} \tag{4.63}$$

其中$x\Delta^{(k)}$是线性方程组

$$J(x^{(k)},\ \alpha)\Delta x^{(k)}=-f(x^{(k)}) \tag{4.64}$$

的解，其中J是系统（4.30）的雅可比矩阵（4.42）。

（4.63）式中的迭代参数ε这样选取，若

$$\|f(x^{(k+1)})\|<\|f(x^{(k)})\| \tag{4.65}$$

则取$\varepsilon=1$，否则将ε减半，直到（4.65）式成立为止。

同样，判定平衡态的稳定性必须解雅可比矩阵的特征方程，它是n阶代数方程，这一般只有用数值方法。

§6 周期解及其稳定性

系统（4.3）存在以T为其周期的周期解，即满足

$$x(t+T)=x(t) \tag{4.66}$$

（4.66）式在空间形成一条封闭的轨道，叫极限环。

如何找周期解呢？这里我们介绍两种办法。第一种办法是通过坐标变换化成极坐标形式，极坐标系中的平衡态就相应于原坐标系中的周期解。正象我们对方程组（4.20）所处理的那样。下面我们再举两个例子。

〔例1〕

$$\begin{cases} \dot{x}=y+x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y}=-x+y(1-x^2-y^2) \end{cases} \tag{4.67}$$

令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则方程组（4.67）化为

$$\begin{aligned} \dot{r}&=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r}=r(1-r^2) \\ \dot{\theta}&=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{r^2}=-1 \end{aligned} \tag{4.68}$$

方程组（4.68）的平衡态是

$$r=0 \quad 和 \quad r=1 \tag{4.69}$$

显然$r=1$就是问题（4.67）中的极限环。而且当$r<1$时$\dot{r}>0$，当$r>1$时$\dot{r}<0$。因此轨线如图4.23。由图4.23看出，这种周期解是稳定的。

〔例2〕

$$\begin{cases} \dot{x}=-y+x(x^2+y^2-1) \\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2-1) \end{cases} \tag{4.70}$$

同样，方程组（4.70）化为极坐标形式

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(r^2 - 1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2} = 1 \tag{4.71}$$

和问题（4.68）相同的是，$r=1$仍是极限环。不过当$r<1$时$\dot{r}<0$，当$r>1$时$\dot{r}>0$，这是不稳定的极限环，见图4.24。

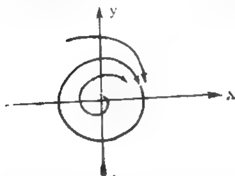


图 4.23 稳定极限环

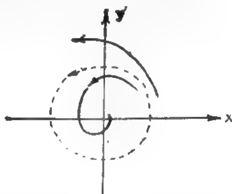


图 4.24 不稳定的极限环

有许多问题并不能化成极坐标r的单一的方程，例如范德堡方程（4.51），若用极坐标便化成

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(1-r^2\sin^2 a)\cos^2\theta \\ \dot{\theta} = 1 - a(1-r^2\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta \end{cases} \tag{4.72}$$

此时，由方程组（4.72）不易找出r的平衡态。

找周期解的第二种方法是平均方法。因为（4.51）式是耗散系统，若要存在周期解，那么在轨线上总能量变化应为零，即

$$\int_t^{t+T} \frac{dE}{dt}dt = \int_t^{t+T} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}x^2\right)dt$$

$$= \int_t^{t+T} -a(x^2-1)\dot{x}^2 dt \tag{4.73}$$

由于$\dot{x}^2$总为正，因此要使上式积分为零，只有存在正负阻尼，这是耗散系统存在周期解的必要条件。设方程（4.51）存在周期为2π的一个解

$$x = a\cos t \tag{4.74}$$

则2π内能量变化为

$$g(a) = E(2\pi) - E(0) = -\alpha\int_0^{2\pi}(x^2-1)\dot{x}^2dt$$

$$= -\alpha\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t-1)a^2\sin^2 t(-a\sin t)^2dt$$

$$= -\alpha\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)\pi^2 \tag{4.75}$$

因此，若存在极限环，应有$g(a)=0$，故找到极限环的平均半径$a=2$。

为了判别其稳定性，圆内若是负阻尼，$g(a)>0$；圆外若是正阻尼，$g(a)<0$，极限环是稳定的。由（4.75）式看出，当$a<2$时，$g(a)>0$；当$a>2$时，$g(a)<0$，故极限环是稳定的。

〔例3〕 瑞利（Rayleigh）方程

$$\ddot{x} + \alpha\left(\frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}\right) + x = 0 \tag{4.76}$$

同样我们设有（4.74）形式的解，则

$$g(a) = E(2\pi) - E(0)$$

$$= -\alpha\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\dot{x}^2 - \dot{x}\right)\dot{x}\,dt$$

$$= -\alpha\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}a^2\sin^2 t-1\right)a^2\sin^2 t\,dt$$

$$= -a\left(\frac{a^2}{4}-1\right)\pi \qquad (4.77)$$

令$g(a)=0$，导得极限环的平均半径$a=2$。和（4.75）式类似，该极限环是稳定的。

以上两种办法对一般系统（4.30）都是困难的。这时我们要用第三章提到的邦加莱截面与周期轨道相截。见图4.25。

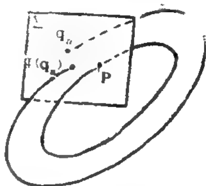


图 4.25 邦加莱截面

若轨道与截面Σ最初交一点q_n，经过一次回返以后交Σ于$\varphi(q_n)$，即

$$q_{n+1}=\varphi(q_n) \qquad (4.78)$$

就构成一个邦加莱映射。显然，若轨道是周期的，则映射（4.78）就有一个不动点p，即

$$p=\varphi(P) \qquad (4.79)$$

而不动点P的稳定性也就反映出周期轨道的稳定性。

将（4.78）式与（4.79）式相减得到

$$|q_{n+1}-p| = |\varphi(q_n)-p|$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\cdot|q_n-p| \qquad (4.80)$$

因此只要映射（4.78）满足

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\right|<1 \qquad (4.81)$$

那么n很大后，q_n就趋向p，即不动点p是稳定的。

【例4】
$$\begin{cases}\dot{x}=x-y-x(x^2+y^2)\\ \dot{y}=x+y-y(x^2+y^2)\end{cases} \qquad (4.82)$$

这是方程组（4.20）取$\mu=1$的情况。方程组（4.82）化为

极坐标形式

$$
\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{4.83}
$$

设$t=0$时$r=r_0$，将（4.83）式由$t=0$积分到t，则得到

$$
r(t) = \left[1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-2t}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4.84}
$$

我们取$r>0$，$\theta=0$为邦加莱截面，那么截面上一点r_n经过绕行$t=2\pi$后又到截面上，形成邦加莱映射

$$
\begin{aligned} r_{n+1} &= \varphi(r_n) \\ &= [1+(\frac{1}{r_n^2}-1)e^{-4\pi}]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.85}
$$

显然映射有一个不动点$r_n=r_{n+1}=1$，它反映系统(4.82)有一个半径为1的极限环。而且

$$
\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r_n}\right|_{r_n=1} = -\frac{1}{2}\left[1+(\frac{1}{r_n^2}-1)e^{-4\pi}\right]^{-\frac{3}{2}} \left.\left(\frac{-2e^{-4\pi}}{r_n^3}\right)\right|_{r_n=1} = e^{-4\pi}<1 \tag{4.86}
$$

因而据条件(4.81)，$r_n=1$是映射(4.85)的稳定的不动点，因而$r=1$也是系统(4.82)的稳定的极限环。

其实，若考虑闭轨$r=1$附近线性化的向量场，则(4.83)式化为

$$
\begin{cases} \dot{\delta r} = \left.\frac{\partial[r(1-r^2)]}{\partial r}\right|_{r=1} \cdot \delta r = -2\delta r \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{4.87}
$$

积分系统(4.87)(由0到2π)，则得到线性化的映射

$$
(\delta r)_{n+1} = \varphi(\delta r_n) = (\delta r)_n e^{-4\pi} \tag{4.88}
$$

(4.88)式的不动点是$(\delta r)_n=0$，即$r_n=1$，且$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\delta r_n}\right|_{\delta r_n=0}=$ $e^{-4\pi}<1$，结论和(4.86)式相同。

对一般系统(4.30)，若选择初条件

$$x_i(0)=\eta_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \tag{4.89}$$

积分某个周期T以后找到值

$$\eta_{i+1}=\varphi_i(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\cdots\eta_n,\ T) \tag{4.90}$$

则(4.90)式就可作为一个映射。那么周期解就是映射(4.90)的不动点，周期解的稳定性由矩阵

$$\left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta_j}\right\} \tag{4.91}$$

的特征值λ_i决定，λ_i叫夫洛开（Floquet）乘子，$\log\lambda_i$叫特征指数。若所有乘子在单位圆内，则周期解是稳定的。这正象雅可比矩阵所有特征值$Re\lambda<0$，则平衡态是稳定的一样。

周期解的分岔是比较复杂的，和图4.11相似，分岔应发生在乘子逃逸出单位圆(夫洛开圆)外，见图4.26。在夫洛开单位圆上的所有点可以表示为

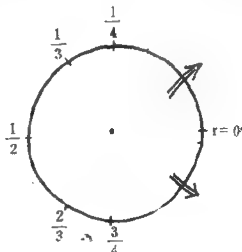


图 4.26 夫洛开单位圆

$$\lambda_0=e^{2\pi ri}\qquad 0\leqslant r<1 \tag{4.92}$$

如果$0<r=\frac{m}{n}<1$是有理数，则分岔出nT周期解，见图3.9及图3.10。如果$0<r<1$是无理数，则分岔出拟周期解。

§7 映射的分岔

前面主要讨论的是常微分方程动力系统，现在我们讨论离散动力系统——映射。

先谈一维映射(或称一维迭代)

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots \tag{4.93}$$

从上节讨论可知，映射(4.93)的不动点为

$$x_n=f(x_n) \tag{4.94}$$

它相当于微分动力系统中的定常状态解(平衡点)。而不动点的稳定性由它的乘子$\lambda=f'(x)$的绝对值决定：

$$\begin{cases} |\lambda|<1 & \text{不动点稳定} \\ |\lambda|>1 & \text{不动点不稳定} \end{cases} \tag{4.95}$$

发生分岔的状态是夫在开单位圆上($\lambda=\pm1$或$|\lambda|=1$)。

另外映射(4.93)也有周期轨道，例如将x_n迭代得到x_{n+1}，而将x_{n+1}再迭代得到x_{n+2}，若$x_{n+2}=x_n$则称为周期2。因为

$$x_{n+2}=f(x_{n+1}),\quad x_{n+1}=f(x_n),x_{n+2}=x_n \tag{4.96}$$

所以周期2是如下映射

$$x=f[f(x)]=f^2(x) \tag{4.97}$$

的不动点。请注意f^2并不是$[f(x)]^2$。

设x_0迭代出x_1，x_1又迭代出x_0，则周期2的稳定性由乘子

$$\lambda=f'(f(x_0))f'(x_0)=f'(x_1)f'(x_0) \tag{4.98}$$

决定。同理周期m，其稳定性由乘子

$$\lambda=f'(x_{m-1})f'(x_{m-2})f'(x_{m-3})\cdots f'(x_1)f'(x_0) \tag{4.99}$$

决定。以后我们还要看到一维映射还有更为复杂的形态。对于二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=f(x_n,\ y_n) \\ y_{n+1}=g(x_n,\ y_n) \end{cases} \tag{4.100}$$

它将平面上一点$P_n(x_n,\ y_n)$映射到平面上另一点$P_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$，若它有不动点$P$，满足方程

$$\begin{cases} x=f(x,\ y) \\ y=g(x,\ y) \end{cases} \tag{4.101}$$

且不动点P的稳定性，由相应的线性化方程组的矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{4.102}$$

的特征值(即乘子)λ决定。

由于(4.100)式相应的线性化方程有形式λ^n的解，所以在不动点P附近的轨道P_0，P_1，P_2……可以用下式来描述

$$P_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n \tag{4.103}$$

其中λ_1和λ_2是矩阵(4.102)的特征值。若$|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$则不动点稳定，若至少有一个乘子$|\lambda|>1$，则不动点不稳定。λ_1和λ_2的数值大小，相当于在各自特征方向上的伸长（或缩小）倍数。

和第三章微分方程所描述的平衡态的形态相似，二维映射也有不同类型的不动点：

1. $0<\lambda_1<1$，$0<\lambda_2<1$，则不动点为稳定结点，见图4.27(a)。

2. $\lambda_1>1$，$\lambda_2>1$，则不动点为不稳定结点。

3. 若$0<\lambda_1<1$，$\lambda_2>1$，则不动点为鞍点，见图4.27(b)。PA和PB称为不稳定流形，PC和PD称为稳定流形。

4. 若至少有一个乘子是负的，则映射一次以后方向改

变一次。

5. 若λ_1和λ_2共轭，$\lambda_1=\bar{\lambda}_2=ae^{i\alpha}$，$0<\alpha<\pi$。则不动点在$a<1$是稳定的焦点，$a>1$是不稳定焦点，$a=1$是中心，见图4.27(c)(d)。且若$\frac{\alpha}{\pi}$是有理数，则轨道是周期的，若$\frac{\alpha}{\pi}$是无理数，则轨道上的点很密地覆盖它，即为拟周期解。

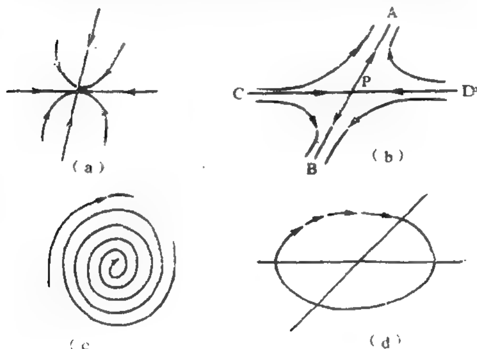


图 4.27 二维映射的基本形态

和本章§3三种基本分岔类型相似，对映射也有这三种分岔，下面举例说明。

〔例1〕一维映射

$$x_{n+1}=\mu-x_n^2=f(x_n) \tag{4.104}$$

它的不动点由方程

$$x^2+x-\mu=0 \tag{4.105}$$

决定。(4.105)式解出

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\mu}}{2} \tag{4.106}$$

图4.28是不动点x随参数μ变化的解图

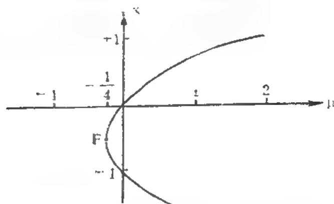


图 4.28 (4.104)式的映射解图

从(4.104)式看出，映射的不动点(平衡态)是$y=x$和$y=\mu-x^2$两条线的交点。

图4.29是不同μ值时，$y=x$和$y=\mu-x^2$的图象。这两条线若有交点，则有不动点；若没有交点，则无不动点。

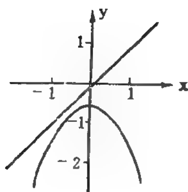
从图4.28和图4.29看出，当$\mu<-\frac{1}{4}$时，没有不动点。当$\mu=-\frac{1}{4}$时有一个不动点$A(-\frac{1}{2}, 0)$。

问题(4.104)式的乘子为

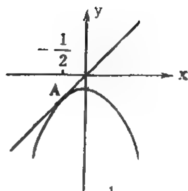
$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial x}=-2x=1\mp\sqrt{1+4\mu} \tag{4.107}$$

所以这个不动点A的乘子$\lambda=1$，它反映曲线f在该点A的斜率为1。根据上节的论述，点

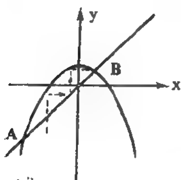
$$F: (x=-\frac{1}{2},\ \mu=-\frac{1}{4}) \tag{4.108}$$



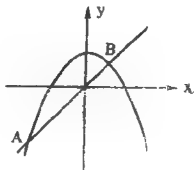
(a) $\mu < -\frac{1}{4}$



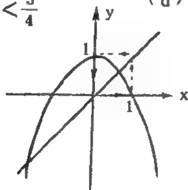
(b) $\mu = -\frac{1}{4}$



(c) $-\frac{1}{4} < \mu < \frac{3}{4}$



(d) $\mu = \frac{3}{4}$



(e) $\mu > \frac{3}{4}$, $\mu = 1$

图 4.29 μ不同时，$y = x$和$y = \mu - x^2$的图象

是一个分岔点，见图4.28。

当μ稍稍大于$-\frac{1}{4}$后，就出现两个不动点A和B，参看图4.29(c)。且A点的乘子(即$f(x)$的斜率)大于1，B点的乘子$|\lambda|<1$(斜率为负)，因而A点是不稳定的，B点是稳定的。A点相当于鞍点，B点相当于结点，到$\mu=-\frac{1}{4}$时，两点合并成一点A，这种分岔叫鞍结点分岔(或切分岔)。此时乘子穿过夫洛开单位圆的情况见图4.30(c)。

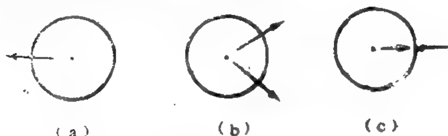


图 4.30 映射的三种分岔类型
(a)叉型分岔，(b)霍夫分岔，(c)鞍-结点分岔

当μ再增加，B点斜率越来越大，到$\mu=\frac{3}{4}$时，$\lambda=-1$。此时A，B两点都不稳定，见图4.29(d)。还有新的形态发生吗？例如$\mu=1$时，映射(4.104)变成

$$x_{n+1}=1-x_n^2 \tag{4.109}$$

我们用初值x_0(例如0.1)代入，则n足够大后x_n就在0和1两个值上跳动

$$0\rightleftharpoons 1 \tag{4.110}$$

见图4.29(e)。这就是周期2。此时乘子穿过夫洛开单位圆的方式是图4.26的$r=\frac{1}{2}$处，见图4.30(a)，所以是一种叉

型分岔或叫周期倍分岔。这两个不动点由方程(4.97)决定：

$$x=f[f(x)]=1-(1-x^2)^2 \tag{4.111}$$

上式是一个四次方程，它可以分解为

$$x^4-2x^2+x=(x^2+x-1)(x^2-x) \tag{4.112}$$

4.112)式的前一个因子就是$x=f(x)$，故$x=f^2$含有$x=f(x)$的两个不动点，另两个不动点由剩下的因子

$$x^2-x=x(x-1) \tag{4.113}$$

决定，它们就是0和1，正是(4.110)式的结果。这个分岔点为

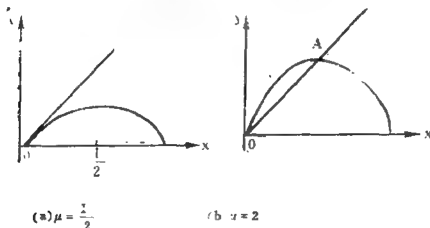
$$\left(x=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{3}{4}\right) \tag{4.114}$$

当μ再增加时，还会出现更为复杂的形态，这里请读者自己分析。

〔例2〕一维映射

$$x=\mu x(1-x)=f(x) \tag{4.115}$$

它是生态学中的一个重要方程，以后还要研究。(4.115)式的不动点是$y=x$和$y=\mu x(1-x)$两条线的交点。图4.31是$\mu=\frac{1}{2}$和$\mu=2$情况下的两条线。



(a)$\mu=\frac{1}{2}$　　(b $\mu=2$

图 4.31　映射(4.115)的不动点

对于$\mu=\frac{1}{2}$，只有一个不动点$x=0$，对于$\mu=2$有两个不动点O和A。

不动点A很易由方程(4.115)求出为

$$x=1-\frac{1}{\mu}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{4.116}$$

(4.115)式的乘子是

$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial x}=\mu-2\mu x \tag{4.117}$$

因此对不动点O，当$\mu=\frac{1}{2}$时，$\lambda=\frac{1}{2}<1$，因而是稳定的；当$\mu=2$时$\lambda=2$，因而是不稳定的。对不动点A，$\mu=2$时$\lambda=0<1$因而是稳定的。

由(4.117)式我们可以找到不动点O刚刚失去稳定时的μ值为

$$\lambda=\mu=1 \tag{4.118}$$

此时乘子穿过夫洛开单位圆的情况如图4.30(a)，

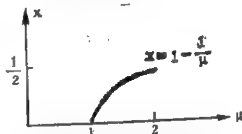


图 4.32 映射(4.115)的解图

相当于图4.26中$r=\frac{1}{2}$情况，这种分岔仍是叉型分岔。其解图的一段如图4.32。

从图上看出，分岔点是

$$(x=0,\ \mu=1) \tag{4.119}$$

〔例3〕二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=-\frac{1}{2}x_n+\mu y_n-y_n^3 \end{cases} \tag{4.120}$$

二维映射(4.120)有不动点

$$O: (x=0,\ y=0)$$

$$A: \left(x=\pm\sqrt{\mu-\frac{3}{2}},\ \ y=\pm\sqrt{\mu-\frac{3}{2}}\right) \tag{4.121}$$

对不动点O，雅可比矩阵(4.102)为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \mu \end{pmatrix} \tag{4.122}$$

它的特征值(乘子)λ满足

$$\lambda^2-\mu\lambda+\frac{1}{2}=0 \tag{4.123}$$

或

$$\lambda=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-2}}{2} \tag{4.124}$$

当$\mu<\frac{3}{2}$时，$|\lambda|<1$，因而不动点O是稳定的；当$\mu>\frac{3}{2}$时，$\lambda_1>1$，因而不动点O是不稳定的。在$\mu=\frac{3}{2}$处，乘子$\lambda_1=1$。它也相当于乘子穿过夫洛开单位圆的$r=\frac{1}{2}$处，因此和例2相同，发生叉型分岔。分岔点为

$$\left(x=0,\ \ y=0,\ \mu=\frac{3}{2}\right) \tag{4.125}$$

分岔出不动点A。

〔例 4〕二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=\mu y_n(1-x_n) \end{cases} \tag{4.126}$$

方程组(4.126)的不动点为

$$O:(x=0,\ y=0) \tag{4.127}$$

$$A:\left(x=\frac{\mu-1}{\mu},\quad y=\frac{\mu-1}{\mu}\right)$$

对不动点O，雅可比矩阵(4.102)是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{4.128}$$

故乘子为

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\mu \tag{4.129}$$

因此当$\mu>1$时，不动点O是不稳定的。对于不动点A，雅可比矩阵(4.102)是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mu & 1 \end{pmatrix} \tag{4.130}$$

它的特征方程是

$$\lambda^2-\lambda+(\mu-1)=0 \tag{4.131}$$

乘子λ求得为

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5-4\mu}\right) \tag{4.132}$$

因此当$\mu>\frac{5}{4}$后，乘子λ为共轭复根。且

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\mu-1 \tag{4.133}$$

由（4.133）式看出，当$\mu=2$时乘子开始穿过夫洛开单位圆，方式如同图4.30（b）。且乘子可表示为

$$\lambda_0=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{2\pi\frac{1}{6}i} \tag{4.134}$$

从（4.134）和（4.92）式比较看出，穿过夫洛开单位圆的

位置处在$r=\frac{1}{6}$处，因此产生一个周期解。

故μ从大于$\frac{5}{4}$开始，不动点$|\lambda|<1$是一个稳定焦点，到$\mu=2$时发生霍夫分岔，分岔出一个周期解。分岔点为

$$A_1\ (x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ \mu=2) \qquad (4.135)$$

在$\mu>2$和很小的$|\mu-2|$，存在围绕点A $(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2})$的吸引不变闭曲线。

除了上面这三种基本分岔形态外，也可以有跨临界分岔。下面看一个例子。

〔例4〕一维映射

$$x_{n+1}=(1+\mu)\ x_n+x_n^2 \qquad (4.136)$$

映射(4.136)有两个不动点

$$x=0 \qquad 和x=-\mu \qquad (4.137)$$

它们的乘子分别为

$$\lambda=1+\mu \qquad 和\lambda=1-\mu \qquad (4.138)$$

显然对$\mu<0$（当然$\mu>-2$），不动点$x=0$是稳定的。而对$\mu>0$，不动点$x=0$是不稳定的。相反，不动点$x=-\mu$在$\mu<0$是不稳定的，在$\mu>0$（当然$\mu<2$）则是稳定的，其解图见图4.33。

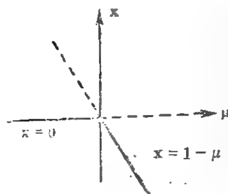


图 4.33　跨临界分岔

第五章 突　变

非线性动力系统，当控制参数变化后除了可以发生分岔现象而外，还会发生系统的状态不连续地跳跃到另一状态的现象，这就叫突变（catastroPhe）。

在自然界中，非连续的突变现象到处都有：地震的突然发生，天气的突然变凉或变暖，火山的爆发，电阻的突然消失（超导），基因的突变导致生物进化等。虽然突变现象难以预料，难以掌握，但是它在复杂形态的演化中占有重要地位。

突变现象人们早已知道，但突变理论则是1975年法国数学家汤姆(Thom)创立的，他的著名著作是“结构稳定性和形态发生学”（Structural Stability and MorPhogenesis）。应该说突变理论创立以后，所谓“量变到质变”可以有一个定量的描述。

事物的形态是多样的，在耗散系统中我们常常研究的是系系行为的最后归宿，即所谓吸引子。在前面我们已经知道，在耗散系统中常有四种吸引子：定常吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和浑沌吸引子。在第九章（细胞自动机）中我们还会见到复杂结构吸引子。每一种吸引子就好比地形中的谷一样，见图5.1。

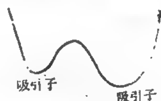


图 5.1　不同的吸引子

粗略地说，不同的吸引子代表不同的质。详述之，定常

吸引子中还可以分为稳定结点，稳定焦点；周期吸引子还可以分为周期1、周期2、周期4等等吸引子，它们也是不同的质。假如系统受到小的扰动以后（这里不是指初条件的变化），吸引子（即形态）并没有发生本质的变化，那么该系统就是结构稳定的。例如系统扰动的前后都是稳定焦点，尽管趋向于焦点的轨线可能不完全相同，这是仍同一个质的吸引子。当然，从物理上考虑在一定范围内，我们希望该系统是结构稳定的，因为观察到的形态可以重复出现。形态发生分岔或突变的地方，正是结构不稳定的地方，分岔或突变前后，形态的质是不相同的。同一种质的吸引子之间有量的差别，这反映量的变化。例如同是稳定焦点，指数衰减可快可慢，这并不影响最终的形态是焦点。

往往一个系统有好几个吸引子。从不同的初始状态出发可能演化到不同的吸引子，我们把演化到某一吸引子的点集称为该吸引子的吸引盆。例如单摆若在静止区的微小偏离，则它就趋向于静止状态的定常吸引子。但是若有较大偏离的集合（此时摩擦损耗用发条或重锤的势能来补充），则趋向于一个钟摆嘀嗒嘀嗒振荡的周期吸引子。

分岔和突变的相同之处是，都发生在结构不稳定的地方，不同之处在于分岔是系统的局部性质，它可以在平衡态附近作泰勒展开求雅可比矩阵的特征值来研究。而突变由一种吸引子跳跃到另一种吸引子，并不是原有的形态失稳，所以它是系统的整体性质，常用拓扑的方法来研究。若从形态（吸引子）之间发生转换这个角度上讲，突变和分岔在文献中往往也是混用的。

§1 折迭突变和尖拐突变

这两种突变是突变的最基本形式。在力学系统中当加速度$\ddot{x}$比较小时，则阻尼项$\dot{x}$和外力$f(x)$平衡，即

$$\dot{x}=f(x) \tag{5.1}$$

若$f(x)$是一个二次多项式，则是折迭（fold）突变，若是三次多项式，则是尖拐（cusP）突变。

1.折迭突变

此时方程（5.1）的形式为

$$\dot{x}=-x^2-a=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{5.2}$$

其中a是控制参数。（5.2）式右端可以表示成位势V的梯度形式，因而位势函数V可以表示为

$$V(x)=\frac{x^3}{3}+ax \tag{5.3}$$

（5.2）式有两个平衡态，它们是

$$\begin{cases} x=\sqrt{-a}\ 和\ x=-\sqrt{-a} & 当a<0 \\ 无平衡态 & 当a>0 \end{cases} \tag{5.4}$$

其位势图为

由图5.2看出，当参数$a<0$时，平衡态是一个吸引子（位势极小值）和一个排斥子(位势极大值)；到$a=0$时，位势只有一个拐点；$a>0$时，位势无临界点。这就相当于参数由$a<0$变到$a>0$时，原来处在位势极小值处的小球，由于位势极小值逐步抬高，到达$a=0$时位势已成拐点，小球突然滑了下来。其突变如图5.3。由图5.3看出，突变点是发生在位势的拐点处，即它既是位势的极值点（即平衡点或临界点）

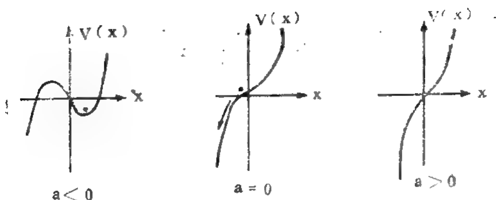


图 5.2 位势$V(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$的图象

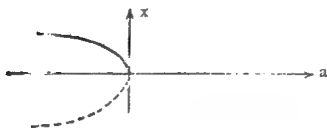


图 5.3 平衡态(5.4)随a的变化

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{5.5}$$

又是位势的拐点

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \tag{5.6}$$

即同时满足

$$\begin{cases} x^2+a=0 \\ 2x=0 \end{cases} \tag{5.7}$$

由（5.7）式导出$a=0$，见图5.4。图5.4可以看成是图5.3投影到参数空间的结果，好象5.3图中稳定的平衡态和不稳定的平衡态投影折迭在一起，故这种突变称为折迭突变。在



图 5.4 突变点$a=0$

自然界中，一个曲面到平面上的映射或投影（例如，物体可见的轮廓就可以看成是边界表面在人眼视网膜上的投影）就可认为是折迭投影．折迭是常见的一种奇异性，例如一个球的上下半球在赤道平面上的投影就发生这种折迭。

汤姆已经论证，给位势$\frac{x^3}{3}$以扰动，不管控制参数是几个，它的稳定性质或突变性质总等价于有一个参数的系统（5.3），系统（5.3）中只有一个参数a，叫余维数为1。

下面我们将看到折迭突变点并不相当于相变中的二阶相变点。而是相当于叉型分岔的分岔点，希不要混淆。

2.尖拐突变

若方程（5.1）的形式为

$$\dot{x}=-x^3+3x-a=-\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (5.8)$$

此时位势V可以表示为

$$V=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+ax \qquad (5.9)$$

（5.8）式和（5.9）式中a是控制参数。平衡态为位势的极值点，即

$$\frac{\partial V}{\partial x}=x^3-3x+a=0 \qquad (5.10)$$

平衡态集合见图5.5。

由于

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=3(x^2-1) \qquad (5.11)$$

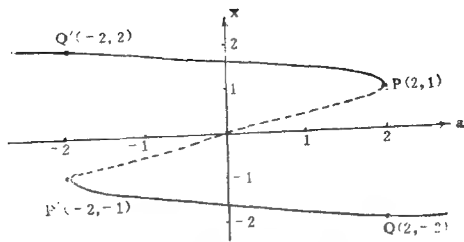


图 5.5 (5.8)式的平衡态集合

所以图5.5中实线相当于位势V的极小值 ($\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}>0$)，它代表稳定的平衡态，而图5.5中虚线相当于位势V的极大值($\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}<0$)，它代表不稳定的平衡态。

若原来质点处在Q′的左边时，位势V只有一个极小值，进入Q′点以后，位势V有两个极小值和一个极大值，质点仍处在原来极小的那个位置上。到达P点时$a=2$，$x=1$此时$\frac{\partial V}{\partial x}=0$且$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$，即质点处在的那个极小值变成了拐点，质点无处可去只好跳到另一个极小值的位置Q。反之，当参数a反方向减小时，状态由Q沿QP′线到达P′，又从P′跳到Q′，这就是突变现象。这种控制参数a来回变化，而突变（跳跃）发生在不同位置上的现象叫滞后性。

突变是什么原因呢？我们只要看一下位势V随a的变化示意图5.6就明白了。当$a<-2$时，系统只有一个稳定的平衡态，如图5.6 (a)。到达$a=-2$时，另一平衡态即将出

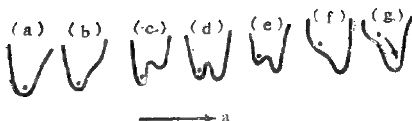


图 5.6 (5.9)式的位势随a的变化

现，图5.6（b）上只刚刚出现一个拐点。$a>-2$以后就出现了三个平衡态，其中两个是稳定的，一个是不稳定的，如图5.6（c）（d）（e），虽然质点所处的极小值位置已逐步抬高，另一极小值甚至比质点所处的极小还要小，质点仍处在原来的极小值位置上。到达$a=2$时，质点所处的极小点已经变成拐点，如图5.6（f）。a只要稍稍大于2，质点已经无法待了，只好跳到另一个极小点上，如图5.6（g）。

但是当a减小时，突变的位置就不同了（图5.7）。处在图5.7（g）的质点要到图5.7（b）以后就突变。

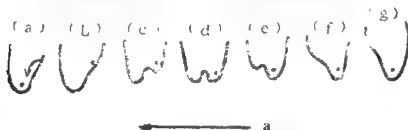


图 5.7 a减小时质点突变的位置

至于突变的位置除了满足（5.10）式$\frac{\partial V}{\partial x}=0$外，还要满足$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$，即同时满足

$$\begin{cases} x^3-3x+a=0 \\ 3(x^2-1)=0 \end{cases} \tag{5.12}$$

由（5.12）式很易解出两个突变点

$$P: (a=2, x=1); P': (a=-2, x=-1) \tag{15.13}$$

下面再讨论若方程（5.1）的形式为

$$\dot{x}=-bx-x^3 \tag{5.14}$$

的情形，注意这里右端仍是三次多项式。它看起来和突变无关，是上一章介绍的叉型分岔，下面我们将看到（5.8）式和（5.14）式都是尖拐突变的特殊情况，方程（5.14）的分岔见图5.8。图5.8和气液相变可很好类比，当$T<T_c$（T_c是临界温度，约374.2°C）是气液两相共存的稳定平衡态，而$T>T_c$后仅有气相存在。

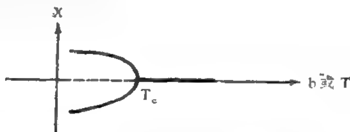


图 5.8 方程(5.14)的分岔图

将方程（5.8）和方程（5.14）结合起来就构成两个控制参数a和b的尖拐突变形式

$$\dot{x}=-x^3-bx-a=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{5.15}$$

控制因素有两个是许多模式所必须的。例如家狗遇到生人时的攻击则受愤怒和恐惧两个因素控制；科学家的成就则受其热情及掌握知识和技术的程度控制。

方程（5.15）相应的位势为

$$V=\frac{x^4}{4}+\frac{b}{2}x^2+ax \tag{5.16}$$

方程（5.15）的平衡态集合如图5.9，其曲面方程为

$$x^3+bx+a=0 \tag{5.17}$$

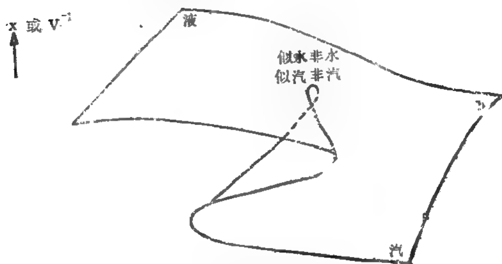


图5.9 尖拐突变的平衡态集合

突变点的集合由 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ 和 $\frac{\partial^2 V}{\partial x}=0$ 决定，即

$$\begin{cases} x^3+bx+a=0 \\ 3x^2+b=0 \end{cases} \tag{5.18}$$

在参数平面（a，b）上形成一个尖点，如图5.10。

从（5.18）式的第二式解出 $x=\sqrt{-\frac{b}{3}}$，将其代入第一式即得到

$$D=\frac{b^3}{27}+\frac{a^2}{4}=0 \tag{5.19}$$

它在参数平面（a，b）上就是形成尖点的两条线。象折迭一样，图5.10的尖拐是曲面到平面映射常见的另一种奇异性。例如透明充气轮胎投影到平面上有四个尖拐，牛奶玻璃瓶投影到平面有两个尖拐，见图5.11。

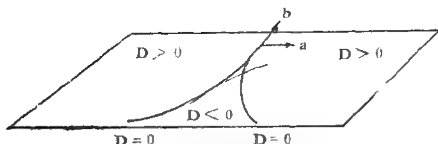


图 5.10 尖拐突变点的集合

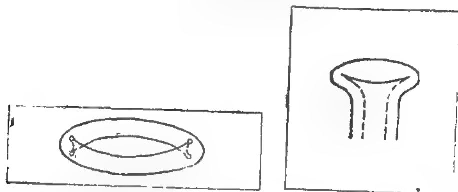


图 5.11 曲面到平面映射出现的尖拐

从平衡点集合（5.17）的三次代数方程知，$D=0$的曲线将参数平面（a, b）分成两个区域：

$$\begin{cases} D<0, & x\text{有三个实根} \\ D>0, & x\text{有一个实根} \end{cases} \qquad (5.20)$$

$D=0$的线上，x有一个实根，两个重根。在 $D=0$线以外，位势V只有一个极小值，它们分别相应于图5.9曲面上页或下页的稳定平衡态。而$D=0$线的尖角以内，位势V有三个极值，其中两个是极小值（稳定平衡态），一个是极大值（相当于图5.9曲面中页部份）。刚刚在$D=0$线上位势是一个极小值和一个拐点。在参数平面（a, b）上的不同区域，位势的形态如图5.12。

从图5.12看出，若参数沿路线（1）变化，位势演化的图

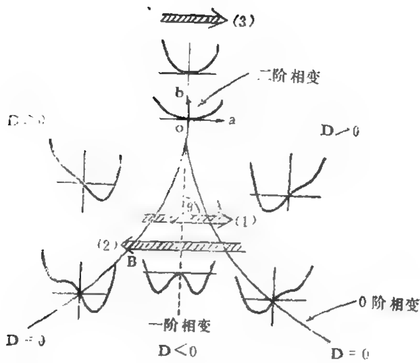


图 5.12 位势(5.16)式分布图

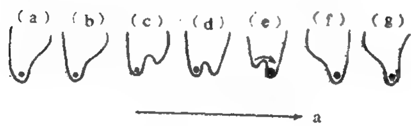


图 5.13 麦克斯韦规则

象如图5.5，那么状态在$D=0$线上的A点处由图5.9的上页跳到下页。反之，若参数沿图5.12中的路线（2）变化，位势演化的图象如图5.6，状态在$D=0$线上的B处由图5.9的下页跳到上页。两者突变的位置不同，这就是突变的滞后性。

汤姆也论证，对$\frac{x^4}{4}$以扰动，不管控制参数多少，它的稳

定性或突变性质总等价于带有两个参数a，b的系统(5.16)，即突变嵌在控制参数为2（即余维是2）的结构稳定的系统中。

从(5.15)式的尖拐突变形式看出，若在图5.9上沿平行于图5.10的a轴切一刀，这就导得实变形式(5.8)式，若在图5.9上沿图5.10的b轴切一刀，就导得叉型分岔(5.14)。

§2 突变的两种规则

尖拐突变有滞后性，从图5.5和图5.6看出，这种突变发生在何处呢？用一句话来说质点保持原有极小值直到原有极小值不存在为止。此时质点只好从原有的吸引子突然跳到另一个吸引子。正象图5.5和图5.6所表示的那样。这种规则叫拖延(delay)规则，突变有滞后现象。

对于一般的系统突变常遵守该规则，这是因为位势变化非常之慢，而且当系统有一个成为整体稳定的极小值时，系统的状态一点也不知道。

对于用分布函数描述的系统（如热力学），常常不采取拖延规则。由于涨落的作用，质点哪儿有最小就往哪儿跑。见图5.13。此时质点并不象拖延规则在图5.13(g)位置时突变，而是刚刚过(d)到达(e)时突变、当控制参数反过来变化时，突变也只是刚刚过(d)以后突变。这种规则叫麦克斯韦规则。

往往对分布函数描述的系统，究竟采取何规则要看噪声N的大小决定。设ΔE是位势壁垒特征高度（在稳定态和相近的亚稳态之间）。若噪声比较小，即$\frac{N_0}{\Delta E}\ll 1$(见图5.14)，

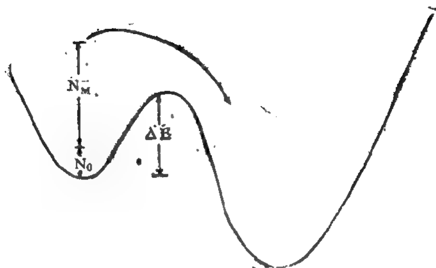


图 5.14 涨落在突变中的作用

那么小的涨落只能辨认局部的位势形状，所以更为小的位势不能找到，因而采用拖延规则。若噪声比较大即$\frac{N_M}{\Delta E}\approx 1$，此时大涨落要寻找全域的势最小值，这就要遵从麦克斯韦规则。

而相变一般都发生粒子在相空间中作随机运动，涨落大到使系统能够找到势的全域最小值。

除了两种规则以外，质变还可以通过突变和渐变这两种方式来实现。究竟采取什么方式这要看新质因素和旧质因素这一对矛盾斗争的结果。若新质因素增强后，旧质因素并未明显减弱，往往采取拖延规则（或麦克斯韦规则）突变到新的状态。若新质因素增强的同时，旧质因素明显减弱，则以渐变方式过渡到新的状态。

对尖拐突变，两种突变规则及两种质变方式都可以得到反映。在图5.12中若参数沿路径（1）或（2）经过D＝0线则

采用拖延规则。若参数经过$D<0$区域的中心线（虚线）则用麦克斯韦规则。这些都是突变方式。若参数沿图5.12中的路径(3)变化，即参数始终在$D>0$区域，则质变以渐变的方式由图5.9的上页渐渐过渡到下页。

在实际的科学和工程问题中，通常位势函数是非常复杂的，甚至完全不知道，有时连梯度系统也不是，如何识别突变发生呢？这就要掌握突变的特征，参看§4。

§3 突变和相变

相变是物理学上的重要内容，过去常谈平衡相变，即封闭系统中的相变，如水汽相变，铁磁相变等。现在则常谈包括耗散结构和浑沌形态在远离平衡系统中出现的非平衡相变。尖拐突变从量的方面和质的方面都可以反映相变的内容。

对于汽液相变，范德伐耳（Van der Walls）方程

$$\left(P+\frac{\alpha}{V^2}\right)\left(V-\beta\right)=RT \qquad (5.21)$$

其中P为压力，V是体积，T是温度，R是气体常数，α和β为该气体的两个特征参数。很易将方程（5.21）化成尖拐突变平衡点集合（5.17）的形式

$$x^3+bx+a=0 \qquad (5.22)$$

式中

$$x=\frac{V_c}{V}-1, \qquad a=\frac{8\left(\frac{T}{T_c}-1\right)-2\left(\frac{P}{P_c}-1\right)}{3},$$

$$b=\frac{8\left(\frac{T}{T_c}-1\right)+\left(\frac{P}{P_c}-1\right)}{3} \qquad (5.23)$$

(P_c, V_c, T_c) 为临界点，且

$$P_c=\frac{a}{27\beta^2}, \quad T_c=\frac{8a}{27R\beta}, \quad V_c=3\beta \qquad (5.24)$$

从（5.23）式看出，由于x和体积V成反比，所以图5.9的顶部平衡态代表液相，底部平衡态代表气相。当温度、压力（代表控制参数a和b）沿着图5.12的路径（1）变化，液体水就突然体积膨胀（x减小）变成气体，但遵从麦克斯韦规则。若温度、压力沿尖角外路线（3）变化，则液相水经过似水非水、似汽非汽的中间状态渐变成气相。

另外，零阶相变、一阶相变、二阶相变从尖拐突变图象上看得更清楚。

零阶相变发生在$D=0$的线上，在$D=0$线的左边和右边位势本身发生不连续。在$D<0$区域的$D=0$线左边质点原来的极小值位置x_1由（5.18）式第二式解出为

$$x_1=\sqrt{-\frac{b}{3}} \qquad (5.25)$$

而质点通过$D=0$线以后突变到$D>0$区域的另一极小点位置，该位置由（5.18）式第一式除以因子$\left(x-\sqrt{-\frac{b}{3}}\right)$而得到为

$$x_r=-2\sqrt{-\frac{b}{3}} \qquad (5.26)$$

将（5.25）式和（5.26）式代人（5.16）式得到相应的位势为

$$V_l=\frac{b^2}{12}, \qquad V_r=-\frac{2b^2}{3} \qquad (5.27)$$

故$D=0$线两边位势差为

$$\Delta V\Big|_{D=0}=V_r-V_l=-\frac{3}{4}b^2 \qquad (5.28)$$

(5.27) 式正说明位势在$D=0$线上不连续，所以按拖延规则的突变叫零阶相变。

一阶相变发生在图5.12中$D<0$区域的中心线上（即$a=0$），该线两边的位势如图5.15。

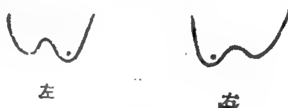


图 5.15 一阶相变线左右的位势形态

从图5.15看出，左右两边位势本身是连续的，在（5.17）式中令$a=0$，可以解得左右两边质点所处的极小值位置分别为

$$x_l=\sqrt{-b}, \quad x_r=-\sqrt{-b} \qquad (5.29)$$

它们所相应的位势分别为

$$V_l=-\frac{b^2}{4} \qquad V_r=-\frac{b^2}{4} \qquad (5.30)$$

因而位势是连续的。但是随参数变化，质点所处位置的位势，左边增加（即抬高），右边下降（即减低），因而可以断定位势导数发生不连续。

$$\frac{dV}{ds}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial V}{\partial a}\frac{da}{ds}+\frac{\partial V}{\partial b}\frac{db}{ds} \qquad (5.31)$$

因中心线两边位势连续，故$\frac{\partial V}{\partial x}=0$，$\frac{da}{ds}$和$\frac{db}{ds}$分别为中心线的方向余弦，$ds$为中心线的线元。

故

$$\frac{da}{ds}=\sin\theta \qquad \frac{db}{ds}=\cos\theta \tag{5.32}$$

$$\frac{da}{db}=\left(\frac{da}{ds}\right)\Big/\left(\frac{db}{ds}\right)=\operatorname{tg}\theta$$

由（5.16）式和（5.29）式求得左右两边的导数

$$\frac{dV_l}{ds}=x\sin\theta+\frac{x^2}{2}\cos\theta=\sqrt{-b}\ \sin\theta-\frac{b}{2}\cos\theta$$

$$\frac{dV_r}{ds}=x\sin\theta+\frac{x^2}{2}\cos\theta=-\sqrt{-b}\ \sin\theta-\frac{b}{2}\cos\theta \tag{5.33}$$

导数差为

$$\Delta\left(\frac{dV}{ds}\right)=\left(\frac{dV_l}{ds}\right)-\left(\frac{dV_r}{\Delta s}\right)=-2\sqrt{-b}\ \sin\theta \tag{5.34}$$

因此按麦克斯韦规则发生的突变，V的一阶导数不连续，所以叫一阶相变。

二阶相变发生在图5.12中的尖点O处，沿b轴$b=s$的O点以外$D>0$区域只有一个极值点$x=0$，而在O点以内$D<0$区域两个极小值位置分别为$x=\sqrt{-b}$和$x=-\sqrt{-b}$。故O点的外部和内部位势为

$$\begin{cases} V(s)=0 & ，当s\geqslant 0 \\ V(s)=-\dfrac{s^2}{4}, & 当s<0 \end{cases} \tag{5.35}$$

由（5.35）式看出，O点处（$s=0$）位势本身和位势的一阶导数都连续。而O点外部和内部的二阶导数分别为0和$\frac{d^2V}{ds^2}=\frac{-1}{2}$，故二阶导数不连续，且

$$\Delta\left(\frac{d^2V}{ds^2}\right)=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \qquad (5.33)$$

所以O点处发生的是二阶相变。前面我们已经说明，它相当于在O点发生叉型分岔。

在物理学中的只有一阶和二阶相变，而无零阶相变，相变图如图5.16。

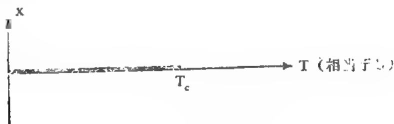


图 5.16　一阶相变和二阶相变

一阶相变发生在图5.16中的粗线上，线的上下方状态不同（汽或液，铁磁相变中上下磁矩取向不同），而在$T>T_c$为失磁状态或汽态。所以在相变中我们并没有看到滞后，沸腾的温度和凝结的温度都是100°C。

由于相变和尖拐突变有如此紧密联系，所以汤姆的突变理论从结构稳定性上或几何上来说明复杂形态的转化，包括流体中的对流状态，晶体增长的固化面（如雪花），地球物理的结构组织，超导中的涡旋形式，生物和化学的形态或韵律，相变等等。

§4　尖拐突变的性质

折迭突变和尖拐突变是最基本的两种突变，在实际中尖拐突变更重要。下面介绍尖拐突变的性质。

1.多模态性（双态性）

形态要发生突变，必须有多种形态同时存在，即控制系

统的位势有多个局地极小值（吸引子），象尖拐突变中尖角内的$D<0$区域。尖拐突变就发生在多态区和单态区的边缘$D = 0$线上。

2.不可到达性

这一点指物理系统中有的状态是不稳定的，即相空间中有些状态是达不到的。这一点是很自然的，两个吸引子之间必然有排斥子，它相当于地形脊。

尖拐突变中图5.9的顶部和底部被不可到达的局部最大的状态隔开。

3.突然跳跃性

这一点是指当控制参数变化时，状态可以发生很大变化，即突然跳跃，见图5.17。

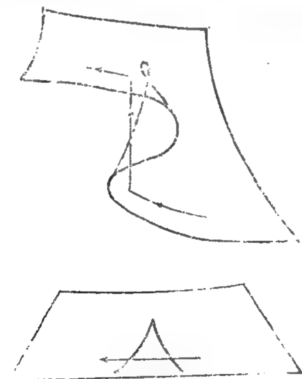


图 5.17　突变性

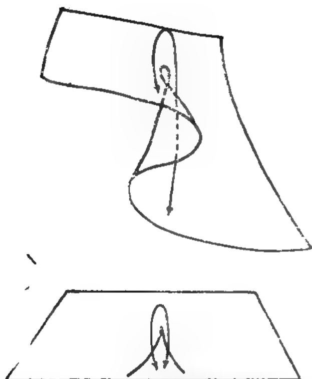


图 5.18 辐散性

如果采用麦克斯韦规则，伴随着位势本身连续变化，但是位势的导数不连续（即不可微）。如果遵循拖延规则，则伴随着位势本身不连续的变化。突变性和采用什么规则无关，甚至不知道有什么规则。

4. 辐散性

当控制参数变化的路径稍有差别，那么最终的状态可能有很大差别，甚至初始参数值和终止参数值相同时也如此。例如尖拐突变，若参数变化的路径在$a=0$的两边仅差一个很少的ε，那么状态最终一个到达顶部，一个到达底部，见图5.18。

5. 滞后性

如前所述，当控制参数按原来路径返回时，突变并不在

原有的位置上，而是有一滞后。

例如尖拐突变若参数按图5.12的路径（1）和（2）演变时，状态突变的位置不同，见图5.19。

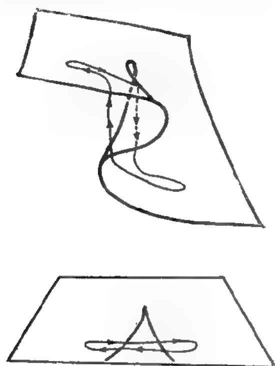


图 5.19 滞后性

第六章　协同学

协同学（synergetics）是由两个希腊字组成的，意味着“协作”，即系统的各个部份协作起来形成第一章所描述的自组织的时空有序结构。特别我们要问是否有一普遍的原理来控制自组织现象，不管自然界个别的子系统是电子也好，分子、光子也好，也可以是生物细胞、动物或人。协同学的创始人是联邦德国理论物理学家哈肯。

§1　自然界的协同现象

自然界有各种各样的宏观系统，例如化学系统，物理系统，生物系统，甚至社会系统。而组成系统的大量的下一层次的客体就叫做子系统。例如物理学又分为流体物理、激光物理、固体物体、等离子体物理、高能物理等等都是子系统。化学反应中的各种原子和分子也是子系统。社会系统中家庭、个人也可作为子系统。

从第二章我们已经看到，根据系统和环境的关系，通常把系统分成三类：一类是孤立系统，它忽略了系统与外界环境的能量交换和物质（包括信息）交换，是自然界存在的某些系统的理想状态，是人们研究最早的简单系统。第二类是封闭系统，它和外界环境有能量交换但无物质交换，热力学第一定律就描述了这种系统。第三类就是自然界大量存在的开放系统，它和外界环境既有能量交换又有物质交换。

尽管系统各式各样，但可以出现同样的现象。例如“平

衡相变”可以发生在不同的封闭系统领域，又如大家知道的孤立子也可以发生在不同的领域。特别是本书研究的非平衡相变在很多不同领域都是相同的，例如各种振荡（极限环）有“生物钟”“化学钟”，非周期的湍流现在几乎到处都有；不但流体中有湍流，还有化学湍流、生物湍流、激光湍流，等离子体湍流，甚至还有固体湍流。通向湍流的道路也相似。

发生在不同领域里的同样现象是否有相同的普适规律呢？人们从“平衡相变”存在普适规律中得到启发。大家知道气液相变中密度发生突变，铁磁相变中磁感应强度有很大变化，超导相变中电阻发生很大变化。我们把相变前后表示系统有序程度的变化的状态变量叫序参量。例如气液相变中的密度或平均分子间距都是序参量。所有平衡相变按照热力学函数（自由能）分为一阶相变（相变前后自由能一阶导数不连续）和二阶相变（相变前后自由能二阶导数不连续），一阶相变曲线的终点叫临界点（气液临界点，铁磁相变居里点），在临界点上发生二阶相变。临界点处涨落很大，各种尺度涨落都在起作用，但威尔逊发现，趋向临界点的过程中具有标度不变性，就是尺度变化后，体系的性质不变（即有自相似结构），他用重整化群方法找到序参量和控制参量（例如$T-T_c$，即温度T和临界点温度T_c的差）关系中的临界指数的标度律，即建立了普适定律。

远离平衡态的非平衡相变是否也能出现普适行为呢？耗散结构理论为研究自然界乃至社会经济中的开放系统，为研究宇宙演化、生命演化打开了通道。而哈肯发现在一个与外界有物质、能量、信息交换的开放系统中，由于其内部各子系统之间的相互作用，在外界控制变量达到一定阈值时，通过子系统之间的协调作用和相干效应，使整个系统从无序到

有序。对于这样一个复杂的系统，其状态变量可能成千上万，影响事物发展的因素也不可胜数，怎样来描写系统在临界点附近的行为呢？结果发现在临界点附近绝大多数状态变量阻尼大、衰减快，对相变的性质和过程影响不大（这叫快变量），只有一个或几个状态变量不但不衰减，而且主宰着演化过程的始终（这叫慢变量），这叫序参量。系统的相变特点由序参量决定。这就是说，状态变量之间的合作和竞争最终导致只有少数序参量支配系统，这种规律对所有系统都是成立的，哈肯叫它为奴役（slaving）原理。

§2 协同学研究的方法概述

协同学研究方法是动力学和统计学相结合的方法，即系统的运动和转变是由动力学得出的必然性和统计学得到的随机性共同决定的。设系统是由许多子系统所组成的开放系统，对其描述可以分为三个不同的层次来进行，即微观、中观和宏观层次。以流体为例，在微观层次上，我们是考虑由经典力学或量子力学所描述的单个分子运动；在中观层次上我们考虑的是在一个小体积元中的流体，它包含大量的分子，以至可以引入温度、密度和速度场的概念，但这个体积元从几何上看只能是一个点，它比宏观体积要小得多，从微观层次到中观层次是由统计力学解决的。在宏观层次上，我们把流体看成是连续的，因此可以在宏观尺度上形成结构，协同学就是讨论宏观结构形成的普适方法。

因此协同学的第一步是建立动力学宏观量所描述的演化方程

$$\frac{\partial q}{\partial t}=N(q,\ \alpha)+F \qquad (6.1)$$

其中N是q的非线性函数，a是由外界输入的能量流和物质流引入的控制参数，q是宏观量，它是由微观量的统计平均得到的，也就是通过概率或概率分布得到的，F是涨落力。当系统不在临界区时，涨落的影响很小，系统中各子系统的运动状态由子系统的独立运动（比如热运动）和子系统之间关联引起的协同运动所决定。在子系统之间的关联能量小于子系统独立运动能量时，子系统的独立运动占主导地位，系统形成不了整体的结构而处于无序状态。在子系统之间关联的能量大于子系统独立运动的能量时，独立运动受到束缚，协同运动占优势，运动显示出有序的特征，但只是在宏观量平均值附近的小涨落，并不发生结构的根本变化。但当控制参量达到临界值时，涨落作用相对变大，对选择哪一种新结构起着决定作用。协同学的第二步是用忽略了涨落力F的方程（6.1）来讨论平衡态的稳定性。协同学的第三步是清除快变量而找到序参量，例如平衡相变中$T\to T_c$时的磁化强度，非平衡相变中的激光强度（或电磁场强度或光子流强度）。找序参量是协同学的核心。这里要注意，序参量来源于系统的内部，不是外界强加给系统的，比如外界泵给激光器的能量（控制变量）是无规能量，但激光器输出的却是高度有序化的激光。最后协同学将要用统计方法来解释宏观新结构的形成。

本章主要介绍将快变量消去的方法。

哈肯的协同学的基本思想是子系统之间的协同合作结果，在临界点附近只有几个状态变量（序参量）无阻尼，它们驱使着其它衰减快的变量的运动，系统的最终有序的状态或结构将由这种慢变量决定。

§3 快变量和慢变量

我们以简单的二个变量的非线性方程为例

$$\begin{cases}\dot{x} = -xy \\ \dot{y} = -\beta y + x^2 \qquad (\beta>0)\end{cases} \tag{6.2}$$

显然，它有一个平衡态（$x=0$，$y=0$），其雅可比矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\beta\end{pmatrix}$$

它的两个特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\beta<0$，这就是两个李雅普诺夫（LiaPunov）特征指数。

对于特征值$-\beta$，特征方程为

$$\begin{cases}0\cdot x+0\cdot y=-\beta x\\ 0\cdot x-\beta\cdot y=-\beta y\end{cases} \tag{6.3}$$

所以$x=0$（y任意）是一个不变流形，且由（6.2）式第二式得到

$$\dot{y}=-\beta y$$

或

$$y=y(0)e^{-\beta t} \tag{6.4}$$

对于特征值$\lambda_1=0$，其不变流形为$h(x)$，则由(6.2)式有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\beta h-x^2}{xh}=h'(x) \tag{6.5}$$

令

$$h=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots\cdots \tag{6.6}$$

代入（6.5）式，并比较系数得到

$$a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=\frac{1}{\beta},\ a_3=0,\ a_4=\frac{2}{\beta^3} \tag{6.7}$$

故

$$h(x)=\frac{1}{\beta}x^2+\frac{2}{\beta^3}x^4+\cdots\cdots \qquad (6.8)$$

(6.8) 式是由$\lambda_1=0$造成的不变流形，称为中心流形（见图6.1），且在其上有

$$\dot{x}=-xh=-\frac{1}{\beta}x^3-\frac{2}{\beta^3}x^5+\cdots\cdots \qquad (6.9)$$

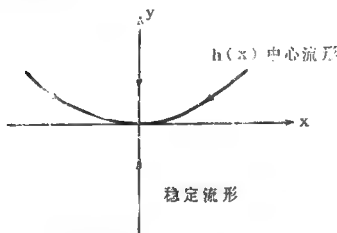


图 6.1 中心流形

积分 (6.9) 式很易得到

$$x(t)\sim\frac{1}{\sqrt{t}} \qquad (6.10)$$

(6.4) 式说明，稳定流形上的点以$e^{-\beta t}$方式趋向原点，而中心流形上的点以$t^{-\frac{1}{2}}$方式趋向原点。故$y(t)$是一个快变量，$x(t)$是一个慢变量。

§4 消去快变量的意义及方法

从 (6.4) 式看出，$y(t)$是快变量（衰减），因而在原点附近任一点出发的解$x(t)$，$y(t)$有差值

$$\varepsilon(t)=y(t)-h[x(t)]$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{y} - h'(x)\dot{x} = -\beta y + x^2 - \frac{\beta h - x^2}{xh}(-xy)$$

$$= x^2 - \frac{x^2 y}{h} = -\frac{x^2 \varepsilon}{h} \doteq -\beta\varepsilon \quad (6.11)$$

故

$$\varepsilon \sim e^{-\beta t} \quad 即 \quad y(t) - h(x) \sim 0 \quad (6.12)$$

(6.12) 式说明$y(t)$可以用$h(x) = \frac{1}{\beta}x^2$代替。也就是说在(6.2) 式中令$\dot{y} = 0$得到

$$y = \frac{x^2}{\beta} \quad (6.13)$$

这样快变量y用慢变量x代替。慢变量满足的方程为

$$\dot{x} = -xy = -x \cdot \frac{x^2}{\beta} = -\frac{x^3}{\beta} \quad (6.14)$$

(6.13)式说明，中心流形(慢变量)控制了快变量(指数衰减)的渐近状态。因此消去快变量有如下意义：

1.原方程零解的稳定性可以由慢变量代替快变量的方程决定。

2.慢变量方程决定了原来系统的宏观状态。事实上流体力学方程就是从波耳兹曼方程消去所有变数而保持局地密度、动量和能量的结果。

这里用求中心流形的方法来消去快变量。

由(6.11)式知，下式

$$\phi'(x)\dot{x} - \dot{y} = M\phi \quad (6.15)$$

可以作为中心流形h(x)和$\phi(x)$的差值，$M\phi$中所有y均用$\phi(x)$代替，例如

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + ax^3 + by^2x \\ \dot{y} = -y + cx^2 + dx^2y \end{cases} \quad (6.16)$$

式中第一个方程的线性部分为零(普遍地是特征值为零实部)，第二个方程的线性部分为负（普遍地是特征值有负实部）。考虑

$$M\phi=\phi'(x)\dot{x}-\dot{y}$$
$$=\phi'(x)[x\phi(x)+ax^3+b\phi^2(x)\cdot x]$$
$$+\phi(x)-cx^2-dx^2\phi(x)$$

同样，若取$\phi(x)=O(x^2)$，则

$$M\phi=\phi(x)-cx^2+O(x^4) \quad (6.17)$$

所以，若取$\phi(x)=cx^2$，则$M\phi=O(x^4)$，即中心流形为

$$h(x)=cx^2+O(x^4) \quad (6.18)$$

这时慢变量方程为

$$\dot{x}=xh(x)+ax^3+bxh^2(x)$$
$$=(a+c)x^3+O(x^5) \quad (6.19)$$

由此看出，

$$\begin{cases}\text{平衡态}(0,\ 0)\text{稳定,当}a+c<0\\ \text{平衡态}(0,\ 0)\text{不稳定，当}a+c>0\end{cases} \quad (6.20)$$

但是$a+c=0$时如何判别稳定性呢？原来我们取$\phi(x)=cx^2$，现在我们取$\phi(x)=cx^2+O(x^4)$则

$$M\phi=\phi(x)-cx^2+cdx^4+O(x^6)$$

故若取　$\phi(x)=cx^2-cdx^4$则

$$M\phi=O(x^6)$$

即中心流形为

$$h(x)=cx^2+cdx^4+O(x^6) \quad (6.21)$$

(6.21)式代人(6.16)第一式

$$\dot{x}=xh(x)+ax^3+bxh^2(x)$$
$$=x[cx^2+cdx^4+O(x^6)]+ax^3+bx[c^2x^4+c^2d^2x^8$$

$$+2c^2dx^5+\cdots\cdots]$$

$$=(a+c)x^3+(cd+bc^2)x^5+O(x^7)$$

$$=(cd+bc^2)x^5+O(x^7) \tag{6.22}$$

故 $a+c=0$ 但$cd+bc^2<0$时，零解稳定，若 $cd+bc^2>0$ 则零解不稳定。

若 $cd+bc^2=0$又如何呢？事实上可以求得

$$\dot{x}=-cd^2x^7+O(x^9) \tag{6.23}$$

例

$$\begin{cases}\dot{x}=\varepsilon x-xy\\ \dot{y}=-\beta y-x^2\end{cases} \tag{6.24}$$

它的雅可化特征值为$-\beta$和ε，不符合一部分是零实部，一部分为负实部的条件，所以改写为

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}=0\\ \dot{x}=\varepsilon x-xy\\ \dot{y}=-\beta y+x^2\end{cases} \tag{6.25}$$

这样前两个方程线性部分的特征值为零；后一个方程的特征值为$-\beta$。这时有二维中心流形，

$$y=h(x,\ \varepsilon) \tag{6.26}$$

取$M\phi=\phi_x'(x,\ \varepsilon)[\varepsilon x-x\phi(x,\varepsilon)]+\beta\phi(x,\ \varepsilon)-x^2$，所以若取

$$\phi(x,\ \varepsilon)=\frac{x^2}{\beta}-\frac{2\varepsilon x^2}{\beta^2}$$

则

$$M\phi=\left(\frac{2x}{\beta}-\frac{4\varepsilon x}{\beta^2}\right)\varepsilon x+\beta\left(\frac{x^2}{\beta}-\frac{2\varepsilon x^2}{\beta^2}\right)-x^2$$

$$+\cdots\cdots$$

$$=O(\text{高阶小项})$$

所以就取

$$h(x,\ \varepsilon)=\left(1-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right)\frac{x^2}{\beta} \tag{6.27}$$

且慢变量所满足的方程组为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\varepsilon x-xh(\varepsilon,\ x)\\&=\varepsilon x-x\left(1-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right)\frac{x^2}{\beta}\end{aligned} \tag{6.28}$$

下面我们介绍另一种方法，使带有小参数ε的方程消去快变数而导得慢运动方程，主要讨论快的机理是耗散的系统。例如

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=\varepsilon f(x,\ y)\\[2ex]\dfrac{dy}{d\tau}=g(x,\ y)\end{cases} \tag{6.29}$$

显然x是慢变数，y是快变数。

令$\varepsilon\tau=t$，则系统(6.29)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(x,\ y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\varepsilon}g(x,\ y)\end{cases} \tag{6.30}$$

因此τ是快时间尺度，t是慢时间尺度

为了消去y，令

$$y=y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+\varepsilon^2y^{(2)}+\cdots\cdots \tag{6.31}$$

上式代入(6.30)第二式，并比较ε的各阶项。由ε^{-1}项得

$$g(x,\ y^{(0)})=0 \tag{6.32}$$

或

$$y^{(0)}=h(x) \tag{6.33}$$

将(6.33)式代入(6.30)第一式得

$$\frac{dx}{dt}=f(x,h(x)) \tag{6.34}$$

这就是慢运动方程。

再精确一些，由ε^0阶项得

$$\frac{dy^{(0)}}{dt}=g_y(x,\ y^{(0)})y^{(1)} \qquad (\text{设}g_y<0)$$

因为(6.33)式说明$y^{(0)}$是x的函数，故由上式解得

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \frac{h_x(x)}{g_y(x,\ h(x))}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{h_x(x)}{g_y(x,\ h(x))}(f(x,\ h(x)) \\ &= \varphi(x) \end{aligned} \tag{6.35}$$

这样慢运动方程(6.34)就修改为

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ h(x)+\varepsilon\varphi(x)) \tag{6.36}$$

这种方法的例子很多。例如强迫耗散振荡

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}=f(x) \tag{6.37}$$

其中$\alpha=\frac{1}{\varepsilon}$是强的阻尼(耗散)。上式化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{\varepsilon}y+f(x) \end{cases} \tag{6.38}$$

这里x是慢变数。令

$$y=y^{(0)}+\varepsilon y^{(1)}+\cdots\cdots$$

代入方程组(6.38)的第二式，由ε^{-1}项得出

$$y^{(0)}=0 \tag{6.39}$$

因而慢运动方程

$$\frac{dx}{dt}=0 \tag{6.40}$$

由ε^0阶产生

$$-y^{(1)}+f(x)=0\text{或}y^{(1)}=f(x) \tag{6.41}$$

因而

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon y^{(1)}=\varepsilon f(x)=\frac{1}{\alpha}f(x) \tag{6.42}$$

上式说明对大阻尼运动，惯性加速度项$\ddot{x}$或$\frac{dy}{dt}$可以忽略，(6.42)式可直接由$\dot{y}=0$导出。

例如化学反应

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=k_2(x-y)\\[2mm]\dfrac{dy}{d\tau}=kx-y\end{cases}\qquad k_2\ll k \tag{6.43}$$

令$k_2=\varepsilon$，$\varepsilon\tau=t$，则

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-(x-y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\varepsilon}(kx-y)\end{cases} \tag{6.44}$$

同样将(6.31)式代入(6.44)式得到ε^{-1}阶的方程是

$$y^{(0)}=kx,\quad \frac{dx}{dt}=-(1-k)x \tag{6.45}$$

这就是方程组(6.44)中令$\frac{dy}{dt}=0$的结果。而ε^0阶项为

$$\frac{dy^{(0)}}{dt}=-y^{(1)}\quad,\text{即}k\frac{dx}{dt}=-k(1-k)x \tag{6.46}$$

这样，慢变数方程为

$$\frac{dx}{dt}=-x+kx+\varepsilon k(1-k)x$$

$$=-(1-k)(1-\varepsilon k)x \tag{6.47}$$

例如哈肯的激光方程

$$\begin{cases}\dot{x}=-\alpha_1 x-axy\\ \dot{y}=-\alpha_2 y+bx^2\end{cases} \tag{6.48}$$

令 $\dot{y}=0$即$y=\frac{+b}{\alpha_2}x^2$代入第一式得

$$\dot{x}=-\alpha_1 x-\frac{ab}{\alpha_2}x^3 \tag{6.49}$$

这就是慢变量方程。

也可以取$\varepsilon=\frac{1}{\alpha^2}$，用(6.31)式代入，由$\varepsilon^{-1}$阶项得

$$y^{(0)}=0\text{ 则 }\dot{x}=-\alpha_1 x \tag{6.50}$$

由ε^0阶项得

$$0=-y^{(1)}-bx^2 \tag{6.51}$$

则慢变量方程为

$$\dot{x}=-\alpha_1 x-ax\varepsilon y^{(1)}=-\alpha_1 x-\frac{ab}{\alpha_2}x^3$$

这和(6.49)式相同。再下一阶近似有

$$\dot{x}=-\alpha_1 x-\frac{ab}{\alpha_2}\left(-1+2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)x^3-\frac{2a^2}{\alpha_2}\left(\frac{b}{\alpha_2}\right)^2x^5 \tag{6.52}$$

§5　用前两个李雅普诺夫特征指数讨论形态转化

前面我们已经知道，开放系统中当控制参数变化后，自发产生多种多样的时空结构，这就是自组织现象。奴役原理说明宏观系统有许多可能的集体运动模式，但在一定外界条件下绝大部分运动模式随时间增长而很快衰减，因而系统的渐

近行为仅由少数最不稳定的运动模式决定，这就决定了宏观系统的自组织现象可以用低维耗散动力系统来决定。从李雅普诺夫特征指数观点看，因李雅普诺夫指数是按大小排列的，见(7.125)式，因此随着时间的增加，最大的前两个指数LE_1和LE_2在形态演化中起关键性的作用。下面结合第四章介绍的定常吸引子和周期吸引子(极限环)的失稳而引起的分岔，看LE_1和LE_2的作用。

先谈定常吸引子的失稳。对叉型分岔，典型例子(4.13)式：

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

按奴役原理，$\mu<\mu_c$时，系统有一个稳定的定态解，$LE_1<0$。当$\mu\to\mu_c$时，LE_1趋于0，但LE_2不趋于0，故讨论这种失稳只须讨论方程(4.13)那样的一维动力系统。下面列出定态解及其LE_1指数的表1。

表 1

μ	定态解	$LE_1=\mu-3x^2$	稳定性
$\mu<0$	$x=0$	μ	稳定
$\mu>0$	$x=0$	μ	不稳定
	$x=\pm\sqrt{\mu}$	-2μ	稳定

LE_1随μ的变化如图6.2。从图上看出分岔点处$LE_1=0$。

对鞍一结点分岔的典型例子(4.27)式：

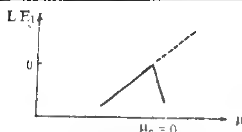
$$\dot{x} = \mu + x^2$$

其定态及LE_1如下表2。

LE_1的变化如图6.3。

表 2

μ	定态解	$LE_1=2x$	稳定性
$\mu<0$	$x=-\sqrt{-\mu}$	$-2\sqrt{-\mu}$	稳定
	$x=+\sqrt{-\mu}$	$2\sqrt{-\mu}$	不稳定
$\mu>0$	无		



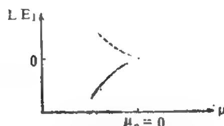


图 6.2 叉型分岔LE_1随μ的变化　　图 6.3 鞍—结分岔LE_1的变化

对霍夫分岔，分岔前必须是一个稳定焦点。从图4.11看出，分岔前LE是一对复共轭特征值，分岔时其实部趋于零，即$LE_1=LE_2\to 0$。因此讨论霍夫分岔时须要讨论二维系统：

$$\dot{z}=(\mu+i\omega)z-bz|z|^2 \tag{6.53}$$

其中$z=x+iy$，取其实部和虚部有

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu x-\omega y-bx(x^2+y^2)\\ \dot{y}=\mu y+\omega x-by(x^2+y^2)\end{cases} \tag{6.54}$$

因此若$\omega=1$，$b=1$就其霍夫分岔的典型例子(4.20)。

定态解的LE见表3。

周期解令$z=re^{i\theta}$，则有表4。

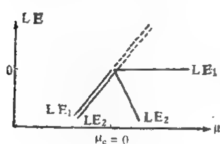
LE随μ的变化如图6.4。

表 3

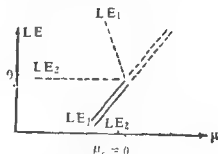
μ	定态解	$LE_1=LE_2$	稳定性
$\mu<0$	$z=0$	μ	稳定
$\mu>0$	$z=0$	μ	不稳定

表 4

	μ	周期解	LE_1	LE_2	稳定性
b>0 超临界	$\mu<0$	无	$\mu<0$	$\mu<0$	
	$\mu>0$	$r=\sqrt{\frac{\mu}{b}}$, $\theta=\omega t$	0	-2μ	稳定
b<0 亚临界	$\mu<0$	$r=\sqrt{\frac{\mu}{b}}$, $\theta=\omega t$	-2μ	0	不稳定
	$\mu>0$	无	$-\mu<0$	$-\mu<0$	



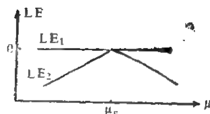
（a）超临界



（b）亚临界

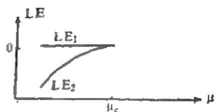
图 6.4 霍夫分岔LE_1的变化图

对于极限环的失稳，设$\mu<\mu_c$时系统有一稳定的周期解，即$LE_1=0$，$LE_2<0$。当$\mu\to\mu_c$时，$LE_2\to 0$，图6.5列出

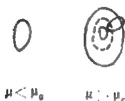
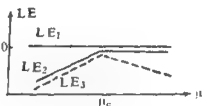



(a)

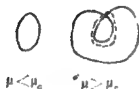




(b)

(c)



(d)

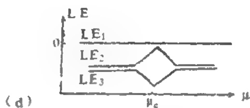


图 6.5 周期解分岔的LE变化图

(a)叉型分岔 (b)鞍一结分岔

(c)霍夫分岔 (d)周期倍分岔

几种极限环分岔示意图及LE的变化图。

第七章　浑　沌

§1　浑沌研究的历史概述

湍流运动的形态普遍存在于大气、海洋、化学、生物、电学、声学等问题中。1883年著名物理学家雷诺做了一个实验，将流体流人圆管，并在圆管中心轴的入口处注人一股很细的颜色水，以便观察流体的运动，结果他发现：

1.当流速U缓慢时，运动是层次分明的层流，中心轴带颜色的流动和周围不混合，但当流速增加到一定程度后，圆管中的流动变成杂乱无章的状态。雷诺称这种状态为湍流。

2.决定流动状态的主要参数是雷诺数$Re=\frac{UL}{\nu}$，其中L是圆管的特征尺度即管的内径，ν是运动学粘性系数。当Re超过一定的临界值Rc以后才能出现湍流。

3.临界雷诺数同流动中的扰动程度（如湍流度、管壁粗糙度）有关，所以Rc可以从2300到4000。

4.当Re数超过临界值Rc时，先在局部地区出现猝发间歇性的湍流斑，以后随着区域的扩大，间歇时间缩短逐步形成完全发展的湍流。

100多年来，显然湍流研究取得一些进展，但有关湍流的本质至今仍不完全清楚。直到1963年气象学家劳伦兹从流体力学方程出发，通过截谱而导得三个一阶常微分方程组，这个方程组是确定性的，带有控制参数瑞利数，当瑞利数大于24.74以后，数值计算的解出现非周期的混乱的结果，这

就是前面提到的劳伦兹吸引子。这种吸引子的特点是：微小的扰动被加强到足以影响宏观行为的程度，初始状态很接近的两条轨道按指数律迅速散开，长期行为是不可预测的（对于非浑沌吸引子，互相接近的轨道始终比较接近，微小的差别总是限制在一定范围内，因此其行为是可以预测的）。劳伦兹的文章当时并未引起重视，直到1971年法国科学家罗尔（Ruelle）和托根斯（Takens）从数学的观点提出纳维-斯托克司方程出现湍流解的机制。他们认为当Re数增加后只要进行2—3次分岔，准周期运动就会变成湍流，并称它为奇怪吸引子。这样劳伦兹的结果引起人们的重视，原来劳伦兹吸引子就是象湍流样的奇怪吸引子。之后很多实验和数值模型都论证了罗尔托根斯的结果。1976年，生物学家梅（May）在一篇起很大促进作用的综述中指出，生态学中一些简单的模型（4.115）式就具有极其复杂的动力行为，包括周期倍分岔和浑沌。1978年弗根堡姆（Feigenbaum）利用梅的模型发现倍周期分岔（即一分为二、二分为四，……）到达浑沌过程中伴有一个普适的无理常数——弗根堡姆常数，而且很多模型的这个常数都一样，这就引起数学物理界的广泛关注。从此，象奇怪吸引子那样从确定性动力系统中出现的现象，统称为浑沌（chaos）。与此同时，美国科学家蒙德布罗认为自然界的很多现象（包括浑沌）都是不规整而破碎的，并不充满空间的，但具有自相似的结构，它们的维数是分数，这些复杂形态统称为分形或碎形（fractal）。

浑沌运动是不是普遍存在的一种运动形式呢？从物理学的发展历史看，实际上存在两种描述体系：确定论和概率论。牛顿力学或更确切地说天体力学曾经是确定论的典范，以致18世纪的法国数学家拉普拉斯宣称，只要知道宇宙中的

每一质点的位置及速度，他就可以预测宇宙在整个未来年份中的状况。

而热力学和统计物理可以作为随机论描述的代表。统计力学的研究给“确定论”以小小冲击，它显然还认为未来原则上是可以预测的，但是只是在统计意义上讲的。后来量子力学的研究提出了“测不准原理”，它告诉我们粒子的位置及速度的测量精度存在一基本的限度，因而这些量是不能精确预测的，这给确定论以很大冲击。著名量子力学家海森堡猜测过，所有非线性物理现象的一个共同特点是不可预测性。浑沌的发现告诉我们，象大气、海洋这样的耗散系统是一个对初始条件很敏感的系统，初始条件的微小差别，最终导致结果的很大差异。确定的系统出现浑沌的结果，这就意味着从长期意义上讲未来是不能预测的。正象著名天文学家、力学家邦加莱所说“初始条件的微小差别将最终导致根本不同的现象”。当今比利时化学家、诺贝尔奖获得者普利高津也说“未来并不完全包含在过去之中”。也就是说我们要不断分析事物的变化才能把握事物的演变。

§2 显示浑沌的例子

由于计算机的广泛应用，使得人们对不同领域中各种各样的非线性问题进行准确的计算，而且通过实验发现许多问题中都存在浑沌运动。例如在银河系的光滑而稳定的引力场中作高速运动的星体和在旋涡系引力场中的天体都具有浑沌的轨道，在三体运动问题中也会出现浑沌运动，以致“轨道理论”一书的作者斯杋贝赫莱（Szebehely）都认为天体力学不再是确定论的科学。在流体力学实验中这种例子更多，例如贝纳对流问题中当上下板的温差再加大，那么周期性振

荡会失去稳定性，表现为浑沌运动。同轴圆柱的流体当内柱旋转时出现泰勒涡旋，当内柱转速再加大，就从波状涡旋变成浑沌运动。化学中的贝洛索夫-札博廷斯基反应，当物质的流量（即提供和排除某些反应物和生成物）达到某些数值时，其中的周期性振荡就会变成浑沌运动。激光器中当照射强度再加大时会出现随机的单模脉冲尖峰。在生物学中，生物群体的个体数目随世代的变化也可表现为一种浑沌运动。另外在非线性振荡中也有浑沌现象。有人把心律失常的无规

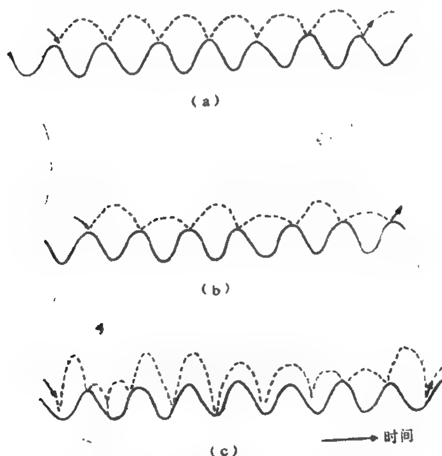


图 7.1 图中实线为台面运动，虚线为小球运动
(a)周期1，(b)周期2，(c)浑沌

则颤动也看作浑沌。种种情况表明，浑沌是一种普遍存在的运动形式。下面举一些实例。

〔例1〕小球在振动台面上的碰撞

设想一个小球自由落下在一个振动的平台上，那么可以想象振动平面振动频率ω的不同，小球运动的形态是不同的。当振动频率比较小时，可以出现小球的定常运动形态（约为周期1），即在每周期中小球下落的时间和小球碰撞的速度都一样。振动频率加大可能出现小球运动的周期2形态，即小球和台面碰撞两次后形态重复。振动频率再加大，小球运动可能出现浑沌运动的形态。图7.1是小球运动的各种可能形态。

设小球趋向台面的速度为u，小球离开台面的速度为v，台面的速度为w，其示意图见图7.2。那么在第j次小球与台面碰撞发生的时间t_j，弹性规律为



图 7.2　小球和台面运动速度

$$v(t_j)-w(t_j)=-\alpha[u(t_j)-w(t_j)] \tag{7.1}$$

又设小球在$j+1$次趋向球台的速度等于小球第j次离开速度

$$u(t_{j+1})=-v(t_j) \tag{7.2}$$

则（7.1）式可以写成

$$v(t_{j+1})-w(t_{j+1})=-\alpha[-v(t_j)-w(t_{j+1})] \tag{7.3}$$

其中$0<\alpha<1$为恢复系数，对弹性碰撞$\alpha=1$。

若设碰撞所需时间比较小，相对于重力下落时间可以忽略不计，则

$$t_{j+1}-t_j=\frac{2v(t_j)}{g} \tag{7.4}$$

设台面振动规律为

$$w(t) = -\beta\omega\cos\omega t \tag{7.5}$$

则由(7.3)式和（7.4）式可以导得以下关系

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + y_j \\ y_{j+1} = \alpha y_j - r\cos(x_j + y_j) \end{cases} \tag{7.6}$$

式中$x=\omega t$，$y=2\omega v/g$，$r=2\omega^2(1+\alpha)\beta/g$。（7.6）式是一个二维映射，这是从物理问题用离散动力系统直接表述的例子。

〔例2〕双稳态系统对外周期激励的反应



图 7.3 杜芬方程的平衡态

设一力学系统有两个稳定的平衡态和一个不稳定的平衡态，如著名的杜芬(Duffing)方程

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0 \tag{7.7}$$

就是如此，见图7.3。图中A和B是两个稳定的平衡态，C是不稳定的平衡态。设想小球就在用薄片弯成的图7.3那种形状的槽中运动，槽受到一个左右来回的强迫振荡，振荡频率为ω。由于振荡，小球不能再停留在A处（或B处）。当振动的频率较小时，小球在A附近（或B附近）振动，并不能跨越C点。当振动的振幅较大时，小球可能在A、B之间并跨越C点作周期振动。但在某种振幅、频率及阻尼的情况下，小球可能先在A点附近振荡，然后越过C点到B点振荡，然后又跨越C点回到B点振荡，在A点和B点振荡的次数并不相同，这就形成了浑沌运动。小球运动的规律受带有强迫的杜芬方程控制：

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = r\cos\omega t \tag{7.8}$$

其中r是强迫振荡的振幅，它可作为控制参数。

为了能实现并观测到这种浑沌运动形态，可用一根细长的钢片夹在支托磁铁的钢架上，当钢架不振动时，钢片被其中一个磁铁吸引成为稳定的平衡态（也可能被另一磁铁吸引住），在两块磁铁的中央就是不稳定的平衡态（两块磁铁的磁力抵销）。但若钢片左右来回作强迫振动，就会出现浑沌，实验装置如图7.4。

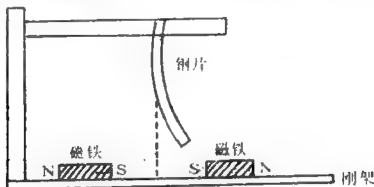


图 7.4 钢片在磁场强迫下的浑沌运动

这两个例子很易见到浑沌。加上第一章中介绍的很多湍流实验都是显示浑沌的例子。本章后面我们还将介绍已经发现的浑沌动力系统。

§3 浑沌发生的原因——敏感初条件

浑沌运动究竟是什么原因造成的？我们看一下如下的一维映射

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & \text{当} 0 \leqslant x_n < \frac{1}{2} \\ 2x_n - 1, & \text{当} \frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1 \end{cases} \tag{7.9}$$

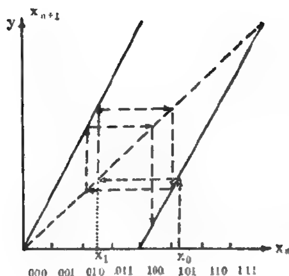


图 7.5 一维映射(7.9)

其中x是在单位格距$I=[0,1]$中的变量，见图7.5。图中的实线是映射$f(x)$，虚线是$y=x$的直线。迭代过程（7.9）式在图7.5上就是从一个x_0出发，作平行于y轴直线交$f(x)$即求得$x_1=f(x_0)$，为了看出x_1，我们从交点处作平行于x轴的直线交$y=x$线的一点，该点的横坐标就是x_1。由x_1求x_2的过程类似。总之，就是作平行于y轴直线交$f(x)$，再作平行于x轴直线交$y=x$，不断进行下去就构成一个迭代序列，如图7.5中箭头所示。

映射$f(x)$有两个不动点

$$x=0, \qquad x=1 \tag{7.10}$$

它们是$y=f(x)$和$y=x$的交点。但是由于$f'(x)=2>1$，因而它们都是不稳定的不动点。

从表面上看，序列x_0，x_1，x_2，…… 似乎有三种形态：

1.当x_0是有理数，且用分数表示，其分母为2的幂数2^k（k是正整数）时，此时$x_n\to0$。例如：$x_0=\frac{11}{32}$，则$x_1=\frac{11}{16}$，$x_2=\frac{3}{8}$，$x_3=\frac{3}{4}$，$x_4=\frac{1}{2}$，$x_5=0$，$x_6=0$……

2. 当x_0是有理数，且用分数表示，其分母有非2的因子时，则序列为周期解。例如$x_0=\frac{13}{28}$则$x_1=\frac{13}{14}$，$x_2=\frac{6}{7}$，$x_3=\frac{5}{7}$，$x_4=\frac{3}{7}$，$x_5=\frac{6}{7}$，$x_6=\frac{5}{7}$，$x_7=\frac{3}{7}$……，即n很大以后在三个数$\frac{6}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{3}{7}$之间循环，这叫做周期3。

3. 当x_0是无理数时，则序列既不趋向于零，也不趋向于周期解，而是一个貌似无规则的解。

实际如何呢？其实只能有一种形态，浑沌。以$x_0=\frac{13}{28}$为例，迭代下去有$x_{3002}=\frac{6}{7}$。但若一个初值x_0'和x_0前900多位小数都相同，后面只差一点，如

$$x_0'=\frac{13}{28}\left(1-\frac{1}{8^{1000}}\right)$$
$$=\frac{13(8-1)(8^{999}+8^{998}+\cdots)}{28\cdot 8^{1000}}=\frac{\text{整数}}{2^{3002}}$$

因此用x_0'去作迭代，到第3002次有$x_{3002}=0$。再换一个和x_0差一点的无理数x_0''

$$x_0''=\frac{13}{28}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{8^{1000}}\right)$$

它的迭代结果是一个无周期的序列。

x_0，x_0'和x_0''这三个仅差很小的初条件，但迭代到3002次以后，若问x_{3002}的数值大于$\frac{1}{2}$还是小于$\frac{1}{2}$？实际上回答不出，因为可能是零，可能是$\frac{6}{7}$，也可能是其它数。这就是说初始值的原始信息到3002次迭代后已消耗殆尽，如果这

时计算机还照样输出什么结果，这个结果已和初值没有关系，自然不代表由x_0确定的真实运动，而只是一些偶然因素的输入信息引起的，这只能是浑沌。这种性质叫敏感初条件。

为了清楚说明这个性质，我们将x_0写成二进制

$$x_0 = 0.a_1a_2a_3\cdots\cdots \tag{7.11}$$

其中a_i不是0就是1，对于$x_0 < \frac{1}{2}$有$a_1 = 0$，对于$x_0 > \frac{1}{2}$有$a_1 = 1$。将f作用于x_0即得x_1

$$x_1 = f(x_0) = \begin{cases} 2x_0, & \text{当} a_1 = 0 \\ 2x_0 - 1, & \text{当} a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (0.a_2\ a_3\ a_4\cdots) \tag{7.12}$$

从（7.12）式看出，对x_0作用一次等于将二进制小数点后面第一位数字抹去，然后将剩下的序列移位到左边。例如$\frac{11}{32}$的二进制就是

$$x_0 = 0.01011\cdots\cdots$$

那么迭代以后有

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1011\cdots\cdots \\ x_2 &= 0.011\ \cdots\cdots \\ x_3 &= 0.11\ \cdots\cdots \end{aligned} \tag{7.13}$$

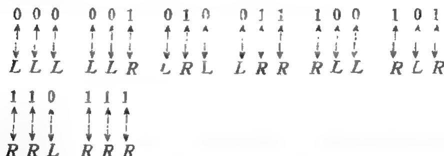
从（7.13）式看出，将x_0每迭代一次其信息就丧失一位。因此若x_0和x_0'仅仅差别在n位数字a_n及其后面数字，由于n次迭代以后有

$$x_n = f^n(x_0) = (0.a_n\ a_{n+1}\cdots\cdots) \tag{7.14}$$

那么$f^n(x_0)$和$f^n(x_0')$差别就变成第一位数字了。

甚至我们用符号R或L来代表区间[0,1]的右面或左面，

那么区间[0，1]内的每一点就构成一个符号序列，图7.5中8个长为$\frac{1}{8}$的区间内，x的开头三个符号分别为



那么迭代一次就是将头一个符号弃去，其余各符号向左挪动一位。如图7.5的子区间101或RLR内的点，第一个R表示x_0在右边，第二个L表示迭代一次(图7.5中的箭头所示)则到左边，第三个R表示再迭代一次到右边。那么再迭代一次即$x_3=f^3(x_0)$点在何处呢？由于前面x_0信息已丧失，那么不把区间格子分得更细，你就无法确定$f^3(x_0)$在哪里。如果对初始值只知道有限精确度，例如二进制的前n位，那么就无法确定$f^n(x_0)$在哪里，这就是浑沌发生的原因。两个相差不到2^{-n}的点，经过n次迭代后所在的轨道可能完全不一样。几乎所有轨道彼此以指数速度作局部分离，即f表现出对初始条件的敏感依赖性。一旦初始信息消耗殆尽，以后的轨道$RLLRLRRL$……，简直和掷钱币一样，因为正面(用L或0表示)反面(用R或1表示)随意都可以。用(7.15)式的方式研究浑沌叫符号动力学。

敏感初条件这条性质在物理系统中是普遍存在的。从映射(7.9)式看，对于x_n分别为0，$\frac{1}{2}$和1的点，迭代一次以后x_{n+1}就分别为1和0。这就相当于映射(7.9)式可以看成两

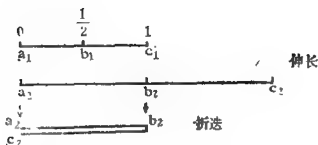


图 7.6 浑沌的伸长折迭特性

步：第一步均匀伸长间格[0,1]成原来的二倍，第二步将伸长的间格折断再折迭起来成原间格，如图7.6。这里伸长的特性最终导致相邻点的指数分离，这里折迭的特性是最终保持序列有界，而且引起映射不可逆(因为有两个不同的x_n值可产生同一个x_{n+1}值；反之x_{n+1}值一旦给定却不能唯一决定x_n)。

对于更为广泛的耗散系统，理解浑沌的关键在于理解状态空间中的伸长和折迭变换。系统内部存在局部不稳定性，这是形态发生分岔所必要的，这就相当于指数型的伸长，见图7.7(a)。同时耗散系统整体上保持稳定性，吸引子相空间的体积保持有限，这就必须把吸引子折迭到自身上，这样状态空间中浑沌吸引子的轨道就被搅乱了，见图7.7(b)。

浑沌操作搅乱状态空间中轨道的方式正如面包师揉面团的方式一样。将一滴蓝色的食品着色剂放在面团中再来揉面团。揉面团的操作包括两个步骤，首先把面团擀平(这时着色剂就扩散开来)，然后把它折迭过来。这样伸长和折迭多次，仔细看一下就会发现，面团中有好多蓝色和白色交替的层。只需这样操作二十次，最初液滴的长度就会被拉长到初始长度的一百万倍以上，而其厚度会减小到分子水平，由于

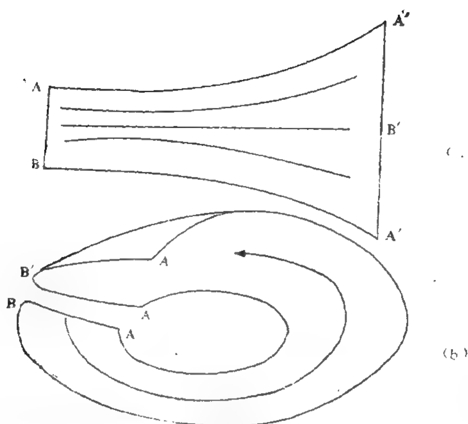


图 7.7 浑沌吸引子的伸长折迭性质

蓝色颜料轨道很混乱，所以蓝色颜料与面团充分混合了。

耗散系统中这种局部不稳定性和整体稳定性的结合就构成浑沌，所以浑沌在耗散系统中是普遍存在的。

§4 浑沌发生的模型

确定的系统可以出现浑沌的最典型的模型就是生态学的模型(4.115)式

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu) = \mu x_n (1 - x_n) \tag{7.15}$$

其中 $0 \leq \mu \leq 4$ 是控制参数，$x \in [0,1]$。在第四章中我们已经简单分析了它的不动点及其分岔情况。

(7.15)式称为逻辑斯蒂(logistic)模型，它是一类单峰映射中最简单的一个，描述了生物群体数目的变化，若n代表时间，x_{n+1}就代表$n+1$世代时的出生数，它一方面和n代的群体数x_n成正比(右端第一项)，另一方面食物的来源却因群体的存在而减少，因而降低了x_{n+1}的存活率(右端第二项)。

(7.15)式中的$f(x_n,\mu)$是一个抛物线，$\frac{\mu}{4}$是抛物线的高度，(7.15)式左端是直线$y=x$。这两条线的交点就是不动点，见图7.8，即不动点满足下式

$$x=f(x) \tag{7.16}$$

由(7.16)式解出不动点为

$$x=0, \quad x=1-\frac{1}{\mu} \tag{7.17}$$

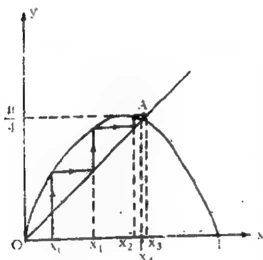


图 7.8 逻辑斯蒂映射(7.15)式

它们就是图7.8中的O点和A点。若是稳定的不动点，则图7.8中箭头所示的迭代过程将收敛到该点(A点)。据第四章分析，不动点的稳定性由不动点处的映射$y=f(x)$的斜率$|f'(x)|$决定，即

$$\begin{cases} |f'(x)|<1, \text{ 则不动点稳定} \\ |f'(x)|>1, \text{ 则不动点不稳定} \end{cases} \tag{7.18}$$

图7.8中的O点就是不稳定的不动点。

当参数μ取不同数值时，迭代过程(7.15)式有不同的动态行为：

$0<\mu<1$时，$x_n\to 0$，即只有一个不动点O，且它是稳定的。$\mu=1$时，$f'(0)=1$，因而发生跨临界分岔。

$1<\mu\leqslant 3=\mu_1$时，有两个不动点O和A。因为$f'(0)=\mu>1$，所以O点不稳定，而$\left|f'\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right|=|2-\mu|<1$，所以A点稳定。例如$\mu=2$时，$x_n\to 0.5$，这叫周期1解。$\mu=3$时，$f'(A)=2-\mu=-1$，发生叉型分岔。

$3<\mu\leqslant 1+\sqrt{6}=\mu_2$时，$x_n$在两个值上来回跳动，例如$\mu=3.2$时，$x_n$趋向在0.513和0.799两个值上跳动，这叫周期2解。此时不动点O和A都是不稳定的。这两个值那儿来的呢？$1+\sqrt{6}=\mu_2$又是怎么确定的呢？下面讨论。

$3.449<\mu\leqslant 3.545=\mu_3$时，周期2的两个值又不稳定，此时$x_n$在四个值上跳动，这叫周期4解。例如$\mu=3.5$时，$x_n$趋向于$0.152\to 0.879\to 0.373\to 0.823\to 0.152$。

这样的过程不断继续下去。从分岔的观点来看，这是不断的一分为二的过程，周期1不稳定分岔出周期2，周期2不稳定分岔出周期4，周期4不稳定分岔出周期8……

表7.1列出各分岔点μ_n的数值。一直到$\mu>3.57=\mu_\infty$时，时间序列$x_0, x_1, \cdots x_n\cdots\cdots$象是分布在区间[0,1]上的随机数，所以称为浑沌图7.9是解图，图中坐标是不等距的。

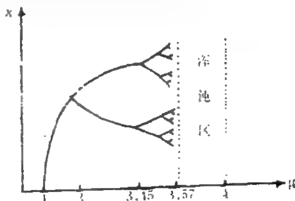


图 7.9 一维映射(7.15)式的解图

从表1和图7.9看

表 7.1 一维映射(7.15)式各分岔点的参数值

分岔情况	μ_n	$(\mu_n-\mu_{n-1})/(\mu_{n+1}-\mu_n)$
1→2	3	
2→4	3.449487743	4.751466
4→8	3.544090359	4.656251
8→16	3.564407266	4.668242
16→32	3.568759420	4.66874
32→64	3.569691610	4.6691
64→128	3.569891259	4.669
128→256	3.569934019	4.669
⋮	⋮	⋮
周期→浑沌	3.569945672	

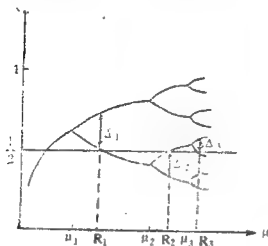


图 7.10 周期2^n中接近于$x=\frac{1}{2}$处各x值之间的距离

出，解x与参数μ的依赖关系大致可分为两个区域：

1.周期区

从周期2^{n-1}到2^n($n\geqslant1$)，各分岔点μ_n有如下关系

$$\mu_n=\mu_\infty-c_n\delta^{-n}\quad(n\geqslant1)\qquad(7.19)$$

或分岔点之间的间隔比有一极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=\delta=4.66920160910299\cdots\cdots\qquad(7.20)$$

即各分岔点之间距离以比例δ倍缩小。这个δ是一个无理数，叫弗根堡姆(Feigenbaum)常数。

另外周期2^n中接近于$x=\frac{1}{2}$的各x值之间的距离（见图7.10）对不同的n有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}=\alpha=2.502907875095892548\cdots\cdots \qquad (n\geqslant 1) \tag{7.21}$$

这个值也是无理数.称为弗根堡姆第二常数。且对于图7.10中各Δ_n所对应的参数值R_n有

$$R_n-R_\infty=c\cdot\delta^{-n} \tag{7.22}$$

并有
$$R_\infty=\mu_\infty=3.5699155\cdots\cdots \tag{7.23}$$

2. 浑沌区

从$\mu=3.57$到$\mu=4$为止是浑沌区。浑沌区中也有不少周期窗口，例如周期$P=3,5,6\cdots\cdots$的窗口，这些周期P也不断倍分岔有$P\cdot 2^1$，$P\cdot 2^2\cdots\cdots$，其中周期3是最大的窗口，它出现时的参数值为$\mu=1+\sqrt{8}=3.828$。窗口区内还有浑沌，窗口的浑沌区内还有窗口。这种结构无穷地重复着，是一种自相似的结构。苏联科学家恰可夫斯基(Sharkovsky)论证了对于广泛一类一维映射$x_{n+1}=f(x_n,\mu)$存在下面自然序列

$$1,\ 2,\ 4\cdots\cdots;\ \cdots 7\times 2^3,\ 5\times 2^3,\ 3\times 2^3\cdots;\ \cdots 7\times 2^2,\ 5\times 2^2,\ 3\times 2^2;\ \cdots 7,\ 5,\ 3 \tag{7.24}$$

如果系统有周期为某数的解，那么就一定有序列(7.24)中排在它前面的那些数的周期解。例如映射(7.15)有周期4解，也一定有周期2和周期1解。序列(7.24)的3是最后一个数，因此若系统有周期3的解，那么就存在一切数的周期解。

所以李(Li)和约克(Yorke)说“周期3意味着浑沌”。

在浑沌区内，$\mu=4$ 是“单片”浑沌，即 x_n 在[0,1]之间都跑遍了。μ值略小于4时，x_n数值分布的范围略小于0到1之间的整个区间，但仍然是连在一起的，但是当 μ 值小于 $\mu_{(1)}=3.6786$时，x_n值分布在两个区间内，每次迭代数值从其中一个跳到另一个，浑沌变成两片浑沌。μ值再减少到 $\mu_{(2)}=3.5926$时，两片浑沌又变成四片，……这种倒分岔过程也到$\mu_\infty=3.57$为止，见图7.11。

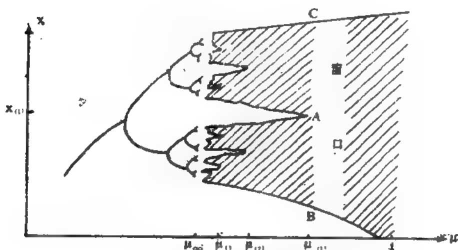


图 7.11 映射(7.15)的倒分岔过程

下面讨论分岔点：

第一次分岔发生在O点的斜率等于1时，即

$$f'(x)\Big|_{x=0}=\mu-2\mu x\Big|_{x=0}=\mu=1=\mu_0$$

第二次分岔发生在A点斜率等于－1时，即

$$f'(x)\Big|_{x=1-\frac{1}{\mu}}=\mu-2\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\right)=-\mu+2$$

$$=-1$$

故 $$\mu=3=\mu_1$$

分岔以后的周期2哪儿来的呢？所谓周期 2 ，即n很大后用x_n代入（7.15）式得x_{n+1}，再用x_{n+1}代入(7.15)式又得到x_{n+2}，它应该就是x_n，即

$$x_n = x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] \tag{7.25}$$

从（7.25）式看出，周期2原来就是映射

$$x = f[f(x)] = f^2 \tag{7.26}$$

的不动点，方程(7.26)写开来就是

$$x = \mu[\mu x(1-x)][1-\mu x(1-x)] \tag{7.27}$$

它是四次方程。因为

$$x = f[f(x)] = f(x) \tag{7.28}$$

所以四次方程(7.27)中包括原映射$x = f(x)$的两个不动点。从方程（7.27）中去掉这两个不动点所含的因子$(x-0)$

$\left[x-\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right]$，剩下的二次方程为

$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + (\mu+1) = 0 \tag{7.29}$$

方程(7.29)的两个根

$$x_{1,2} = \frac{1+\mu \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \tag{7.30}$$

它们就是周期2的解，或它们满足

$$\begin{cases} x_2 = \mu x_1(1-x_1) \\ x_1 = \mu x_2(1-x_2) \end{cases} \tag{7.31}$$

第三次分岔应发生在周期2的解不稳定的地方。从$y = x$和$y = f^2 = f[f(x)]$的图7.12图象看出，不稳定就发

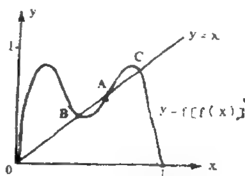


图 7.12　映射f^2的图象

生在f^2的斜率等于－1处(图中的B点和C点)。这就要考虑f^2的导数，因为

$$[f(f(x))]'_{x_1或x_2} = f'(x_1)\cdot f'[f(x_1)]$$

$$= f'(x_1)\cdot f'(x_2) \qquad (7.32)$$

所以$f^{2\prime}$在x_1或x_2的数值为－1，即

$$\mu^2(1-2x_1)(1-2x_2) = -1 \qquad (7.33)$$

将(7.30)式代入(7.33)式解出

$$\mu = 1 \pm \sqrt{6} \qquad (7.34)$$

(7.34)式中取＋号的一个就是μ_2。

其它分岔点的值μ_n可用类似方法求得。例如周期4解满足$x_{n+4}=x_n$，即$x=f^4(x)$。要求f^4的不动点，即是f^4和$y=x$的交点，它们共有八个交点，除去映射$x=f(x)$的两个不动点以及映射$x=f^2$的两个不动点以外，剩下的四个就是周期4解x_1，x_2，x_3，x_4。再利用

$$(f^4)' = f'(x_1)f'(x_2)f'(x_3)f'(x_4) = 1 \qquad (7.35)$$

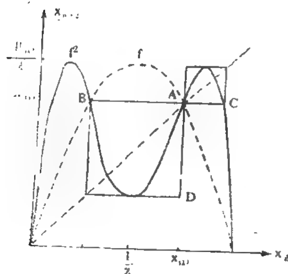


图 7.13 $\mu_{(1)}$时的二次迭代

就可以找到周期4到周期8的分岔点μ_3。

现在来求倒分岔点$\mu_{(1)}$，$\mu_{(2)}$……。从图7.11看出，$\mu=4$处的情况和$\mu_{(1)}$处AB和AC的情况相似，所以考虑$\mu_{(1)}$处的二次迭代情况

$$x_{n+2} = \mu_{(1)}[\mu_{(1)}x_n(1-x_n)]$$

$[1-\mu_{(1)}x_n(1-x_n)]$ (7.36)

见图7.13。图中虚线f是原抛物线，实线是二次迭代(7.36)式。A是不动点，这时以AB为边的正方形或以AC为边的正方形正好是$\mu=4$时的一个缩影。如果初始值落在AB内(或AC内)，则两次迭代后仍落在AB内（或AC内），而且点的分布情况类似于$\mu=4$的情况。所以图7.11中的A、B、C就是图7.12中A、B、C三点，它们的横坐标就是图7.11中的纵坐标。现在从图形上求出倒分岔点的$x_{(1)}$和$\mu_{(1)}$。

因为$AB=2\left(x_{(1)}-\frac{1}{2}\right)$，$AD=x_{(1)}-f^2\left(\frac{1}{2}\right)$

$=x_{(1)}-\frac{\mu_{(1)}^2}{4}\left(1-\frac{\mu_{(1)}}{4}\right)$，令$AB=AD$，且$x_{(1)}$是$f$的不动点。所以$x_{(1)}=1-\frac{1}{\mu_{(1)}}$，故得到$\mu_{(1)}$满足

$$\mu_{(1)}^4-4\mu_{(1)}^3+16=0 \quad (7.37)$$

由此解出 $\mu_{(1)}=3.678$，$x_{(1)}=0.728$。

§5 重整化群方法和通用常数

著名物理学家威尔逊(Wilson)在研究相变和临界现象时采用了卡德洛夫(Kadanoff)的重整化群的方法。因为在临界温度时相关长度是比较大的，因此直接计算将要包括在大的相关长度内的所有自旋，例如图7.14(a)是一个伊辛(Ising)自旋方格，它的指向或是向上或是向下。我们将四个自旋合成一块，如图7.14(b)，由于在临界温度时自旋是强烈相关的，所以认为四个自旋合成的块也只有两个可能的状态：向上或向下。也就是说，四个自旋合成的块自旋还是

一个有效的伊辛系统，但现在的块自旋格子(图7.14(c))距离是原来的两倍，如果我们以格子距离为单位表示相关长度，那么相关长度就减小了一半，这样一步步做下去相关长度就化为1的量级。图7.14(c)和图7.14(a)实际上是相似的，因而说是存在自相似的结构。

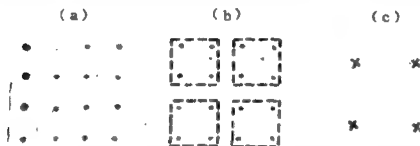
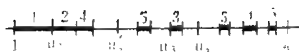


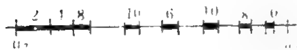
图 7.14 卡德洛夫块自旋结构

而浑沌现象和临界现象之间是类似的。浑沌过程也存在自相似结构，例如图7.15(a)是一维映射$\mu=1$到$\mu=4$一段中周期解的分布状况。将其中取出一段(μ_2，μ_2')，其周期解分布和原来一样，只是周期加倍，同样原来的一段(μ_3，μ_3')只是周期是原来三倍，分别见图7.15(b)和(c)。

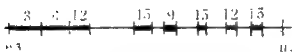
为了求出通用常数δ和α，可以通过自相似的重整化群方法得到，我们从迭代映射求到的图7.10中的Δ_1和Δ_2过程，找出求δ和α的方法。图7.10中的Δ_1是$f^2\left(\frac{1}{2}\right)$和$\frac{1}{2}$之间的距离，而$\Delta_2$是$f^4\left(\frac{1}{2}\right)$和$\frac{1}{2}$之间的距离，见图7.16和图7.17。将图7.16和图7.17的两个小方块(一个边长为Δ_1，另一个边长为Δ_2)加以比较看出，Δ_1的方块中的曲线是f的一段，Δ_2方块中的曲线是f_2的一段，这两段非常相似，放大后如



(a)



(b)



(c)

图 7.15　分岔图的自相似性

图7.18。只是图象颠倒了。因为从极限讲，$\Delta_2/\Delta_1 = \frac{1}{\alpha}$，所以将图7.18(b)的图象放大$\alpha$倍就和图7.18($a$)的图象一样，即

$$g(x) = -\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \tag{7.38}$$

(7.38)式就是反应自相似结构的泛函方程或重整化群方程，意义是尺度x缩小α倍的图象加以放大α倍和尺度为x的图象相同，其中负号表示计算距离和图象的方向相反。函数$g(x)$是n趋于很大时的一种经过2^n迭代后的方程

$$g(x) = f(f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))) \tag{7.39}$$

泛函方程(7.38)求解是困难的。我们不妨设

$$g(0) = 1 \tag{7.40}$$

因为映射(7.15)可以通过下列变换

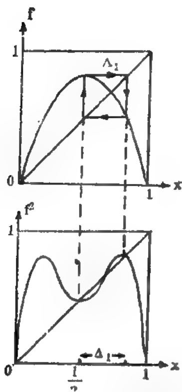


图 7.16　求Δ_1的过程

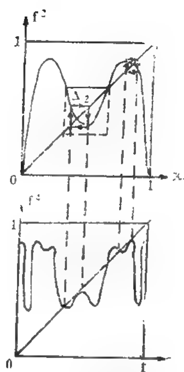


图 7.17　求Δ_2的过程

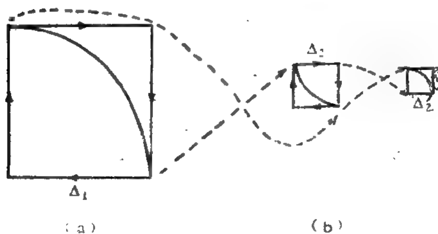


图 7.18　自相似图 $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{1}{\alpha}$，$\frac{\Delta'_2}{\Delta_2}=\frac{1}{\alpha}$，$\frac{\Delta'_2}{\Delta_1}=\frac{1}{\alpha^2}$

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{\mu}y,\quad \mu=\sqrt{1+4\lambda}+1$$

$$z=\mu\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad c=\frac{1}{4}\mu(\mu-2) \tag{7.41}$$

将映射(7.15)化为

$$\begin{cases} y_{n+1}=1-\lambda y_n^2 \\ z_{n+1}=c-z_n^2 \end{cases} \tag{7.42}$$

所以设

$$g(x)=c_\infty-x^2 \tag{7.43}$$

将 (7.43) 式代入 (7.38) 式有

$$c_\infty-x^2=-\alpha\left[c_\infty-\left(c_\infty^2-\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)^2\right]$$

$$=-\alpha\left[c_\infty-\left(c_\infty^2-2c_\infty\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^4}{\alpha^4}\right)\right]$$

$$=(-\alpha_\infty c_\infty+\alpha c_\infty^2)-2c_\infty\frac{x^2}{\alpha}+o(x^4) \tag{7.44}$$

两边比较系数得

$$\begin{cases} c_\infty=-\alpha(c_\infty-c_\infty^2) \\ \alpha=2c_\infty \end{cases} \tag{7.45}$$

将(7.45)式的第二式代入第一式，消去c_∞后得

$$\alpha^2-2\alpha-2=0 \tag{7.46}$$

解出

$$\alpha=1\pm\sqrt{3} \tag{7.47}$$

取+号有

$$\alpha=2.732 \tag{7.48}$$

它和实际的弗根堡姆常数相比仅差10%。

下面求δ，图7.19是周期倍分岔点示意图。



图 7.19 周期倍分岔点分布图

由于 $c_n = c_\infty - \varepsilon\delta$, $c_{n+1} = c_\infty - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) (7.49)

将 (7.49) 式代入 (7.45) 式的第一式得

$$c_n + \varepsilon\delta = -\alpha(c_{n+1} + \varepsilon)\ (1 - c_{n+1} - \varepsilon)$$

$$= -\alpha\ (c_{n+1} + \varepsilon - c_{n+1}^2 - \varepsilon c_{n+1} - \varepsilon c_{n+1} - \varepsilon^2)$$

$$= -\alpha\ (c_\infty + \varepsilon - c_\infty{}^2 - \varepsilon c_\infty - \varepsilon c_\infty - \varepsilon^2)$$

比较两边的系数得

$$\delta = 2\alpha c_\infty - \alpha$$

用 $c_\infty = \dfrac{\alpha}{2}$ 代入得

$$\delta = \alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha = 4.72 \qquad (7.50)$$

它和实际的弗根堡姆常数（见7.20式）只差10%。

对于周期倍分岔的周期长度P，当n趋向于∞时，有关系

$$P(\mu_n) \sim (\mu_\infty - \mu_n)^{-\nu} \qquad (7.51)$$

ν以称为临界指数，见图7.20。

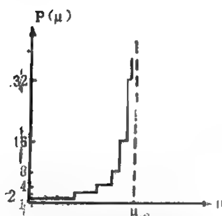


图 7.20 周期倍分岔周期长度与μ的关系

又因为(7.19)式

$$\mu_\infty - \mu_n \sim \delta^{-n} \qquad (7.52)$$

故

$$P(\mu_n) \sim \delta^{n\nu} \qquad (7.53)$$

因为

$$P(\mu_{n+1}) = 2P(\mu_n) \tag{7.54}$$

(7.54)式相当于临界现象中的相关长度之间关系。

故

$$\delta^{(n+1)\eta} = 2\delta^{n\eta}$$

或

$$\delta\eta = 2 \tag{7.55}$$

因而

$$\eta = \frac{\ln 2}{\ln \delta} \tag{7.56}$$

利用$c_\infty = \frac{\alpha}{2}$，求得

$$c_\infty = 1.366 \tag{7.57}$$

由c_∞再据(7.41)式我们可以求到映射(7.15)周期倍分岔的累积点μ_∞，因

$$c_\infty = \frac{1}{4}\mu_\infty(\mu_\infty - 2) \tag{7.58}$$

故

$$\mu_\infty^2 - 2\mu_\infty - 4c_\infty = 0 \tag{7.59}$$

解得

$$\mu_\infty = 1 \pm \sqrt{1 + 4c_\infty} \tag{7.60}$$

取+号得$\mu_\infty = 3.54$。μ_∞和实际的3.57差别也很小。

通用常数δ不仅有理论意义还有实际意义。当实验(或计算机模拟)中发现在参数μ_0和μ_1处有周期倍分岔，由(7.19)式

$$\begin{cases} \mu_\infty - \mu_0 = c \\ \mu_\infty - \mu_1 = c\delta^{-1} \end{cases} \tag{7.61}$$

则其它分岔点的位置就有

$$\mu_j = \mu_\infty - c\delta^{-j} = c\delta^{-1} + \mu_1 - c\delta^{-j}$$

$$= \frac{\mu_1 - \mu_0}{1 - \delta^{-1}}\delta^{-1} + \mu_1 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{1 - \delta^{-1}}\delta^{-j}$$

$$=\mu_0\frac{\delta^{1-j}-1}{\delta-1}+\mu_1\frac{\delta-\delta^{1-j}}{\delta-1} \tag{7.62}$$

这样，由（7.62）式可以预先估算μ_j的位置，对实验有很大好处，还可估算μ_∞的位置。因为由（7.61）式得

$$\mu_\infty=\mu_0+c=\mu_0+\frac{\mu_1-\mu_0}{1-\delta^{-1}} \tag{7.63}$$

故

$$\frac{\mu_\infty-\mu_0}{\mu_1-\mu_0}=\frac{\delta}{\delta-1}\doteq 1.27 \tag{7.64}$$

即μ_∞离μ_1的位置大概是$\mu_1-\mu_0$的27%。

关于自相似性，我们还要在下面论述。

§6 劳伦兹吸引子及埃隆吸引子

1963年美国麻省理工学院的气象学家劳伦兹在描述大气运动时，将偏微分方程采用迦辽金（Galerkin）方法（谱展开）并截谱到只有三个未知量的常微分方程组——著名的劳伦兹方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=-\sigma x+\sigma y\\ \dot{y}=rx-y-xz\\ \dot{z}=xy-bz\end{cases} \tag{7.65}$$

其中x代表对流强度，y代表上升流和下降流的温差，z代表铅直方向温度分布的非线性强度。r是瑞利数，它代表引起对流和湍流的驱动因素（如贝纳对流上下板的温差）和抑制对流因素（如粘性）之比，这是系统（7.65）的主要控制参数。$\sigma=\frac{\nu}{\kappa}$是普朗特（Prandtl）数（$\nu$和$\kappa$分别是分子粘性系数和热传导系数），$b$是外形比。

因为系统（7.65）的相空间体积变化率或雅可比矩阵的迹（向量场的散度）为（参看第二章）

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\mathrm{div}\dot{V}=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

$$=-(\sigma+b+1)<0(\sigma>0,\ b>0) \tag{7.66}$$

所以劳伦兹系统（7.65）是一个耗散系统。（7.66）式意味着相空间的体积元以指数率收缩，即

$$V(t)=V(0)e^{-(\sigma+1+b)t} \tag{7.67}$$

耗散系统代表整体上的稳定性，若再加上局部不稳定性，这是出现浑沌或湍流形态的基础。

首先求劳伦兹系统（7.65）式的平衡态(定常状态解)。由（7.65）式的第一式得$x=y$，代入第二式得$x(r-1-z)=0$，由第三式得$x^2=bz$。因此若$x=0$，则$y=0$和$z=0$，若$z=r-1$，则$x=y=\pm\sqrt{b(r-1)}$。总之

当$r<1$时，O_1 (0, 0, 0)是平衡态，

当$r>1$时，有三个平衡态

$$\begin{aligned}
&O:\ (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 0)\\
&c_1:\ (x,\ y,\ z)=(\sqrt{b(r-1)},\\
&\quad\sqrt{b(r-1)},\ r-1)\\
&c_2:\ (x,\ y,\ z)=(-\sqrt{b(r-1)},\\
&\quad-\sqrt{b(r-1)},\ r-1)
\end{aligned} \tag{7.68}$$

对于平衡态O，其稳定性决定于雅可比矩阵

$$\begin{vmatrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{vmatrix} \tag{7.69}$$

的特征值λ，其特征方程为

$$(b+\lambda)[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)]=0 \qquad (7.70)$$

它有三个根

$$\lambda_1=-b,$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{-(\sigma+1)\pm\sqrt{(\sigma+1)^2-4\sigma(1-r)}}{2} \qquad (7.71)$$

因此$r<1$时三根均为负实根，O点是稳定的平衡点。当$r>1$时，$\lambda_{2,3}$中有一正一负，O点是不稳定的平衡点。因此$r=1$时，有一特征值沿实轴穿过虚轴发生一次叉型分岔。

对平衡点c_1和c_2，其稳定性由矩阵

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \qquad (7.72)$$

的特征值λ决定。(7.72)式的特征方程为

$$\lambda^3+(\sigma+b+1)\lambda^2+(r+\sigma)b\lambda+2b\sigma(r-1)=0 \qquad (7.73)$$

当$\lambda\to1^+$(即刚刚超过1)，(7.73)式的三个根趋向

$$\begin{aligned} &\lambda_1\to0^- \\ &\lambda_2\to-(\sigma+1) \\ &\lambda_3\to-b \end{aligned} \qquad (7.74)$$

即c_1和c_2是稳定的平衡点。到$r=1.345$时，(7.73)式中的三个负特征值有两个相等。到$r>1.345$时，c_1和c_2变成稳定焦点，即方程(7.73)中有一对复共轭特征值，且实部为负，为此设共轭特征根为

$$\beta=\beta_1+i\beta_2,\qquad \overline{\beta}=\beta_1-i\beta_2 \tag{7.75}$$

则方程（7.73）化为

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\overline{\beta})=0 \tag{7.76}$$

其中α是实特征值。将(7.76)展开得

$$\lambda^3-(2\beta_1+\alpha)\lambda^2+(|\beta|^2+2\beta_1\alpha)\lambda-|\beta|^2\alpha=0 \tag{7.77}$$

因为我们要研究r再大后，c_1和c_2这两个稳定焦点又变成什么，所以若在某个r_0处$\beta_1=0$，则一对复共轭特征值穿过虚轴，就发生一次霍夫分岔。

故由方程（7.77）看出，若$\beta_1=0$，则

$$(\lambda^2\text{项的系数})\times(\lambda\text{项的系数})=\text{常数项} \tag{7.78}$$

由方程（7.73）知，(7.78)式意味着

$$(\sigma+b+1)(\sigma+r)b=2\sigma b(r-1) \tag{7.79}$$

由（7.79）式解出

$$r_0=\frac{\sigma(\sigma+b+3)}{(\sigma-b-1)} \tag{7.80}$$

若取$\sigma=10$，$b=8/3$，则

$$r_0=24.74 \tag{7.81}$$

（7.80）式和（7.81)式就是霍夫分岔的分岔点，它显然要求

$$\sigma>b+1 \tag{7.82}$$

下面我们来证明在r_0处确实符合霍夫分岔条件

$$\beta_1'(r_0)>0 \tag{7.83}$$

即

$$\beta_1(r<r_0)<0,\ \beta_1(r=r_0)=0,\ \beta_1(r>r_0)>0 \tag{7.84}$$

将方程（7.77）与方程（7.73）比较有

$$
\begin{aligned}
(\sigma+b+1) &= -(2\beta_1+\alpha) \\
(\sigma+r)b &= |\beta|^2+2\beta_1\alpha \\
-2\sigma b(r-1) &= |\beta|^2\alpha
\end{aligned}
\tag{7.85}
$$

由第一式得到

$$
\alpha=-(\sigma+b+1+2\beta_1) \tag{7.86}
$$

由第二式和第三式得

$$
\begin{aligned}
(\sigma+r)b\alpha &= |\beta|^2\alpha+2\beta_1\alpha^2 \\
&=2\beta_1\alpha^2-2\sigma b(r-1)
\end{aligned}
\tag{7.87}
$$

将（7.86）式代入（7.87）式得

$$
\begin{aligned}
&-(\sigma+b+1+2\beta_1)(r+\sigma)b^2 \\
&=-2\sigma b(r-1)+2\beta_1(\sigma+b+1+2\beta_1)
\end{aligned}
\tag{7.88}
$$

将（7.88）式对r求微商，并用r_0值代入，注意$\beta_1(r_0)=0$，得到

$$
\beta'_1(r_0)=\frac{b(\sigma-b-1)}{2[b(r_0+b)+(\sigma+b+1)^2]}>0 \tag{7.89}
$$

（7.89）式说明β_1的值随r增加而增加，因而结论（7.84）式正确。

总之，当$r<r_0$时，c_1和c_2为稳定焦点，在$r=r_0$处发生亚临界霍夫分岔，出现不稳定的极限环。劳伦兹系统随r变化，形态如图7.21。

$r>r_0=24.74$以后的形态，相空间的轨线是由O点出来进入c_1再转出来到O点，再离开O点到c_2，再由c_2出来到O，这样反复下去。但由于绕c_1和c_2的方式及圈数都是不规则的，因而是非周期的奇怪吸引子或浑沌形态。

按（7.67）式这个吸引子要吸引到相空间的有界区域，

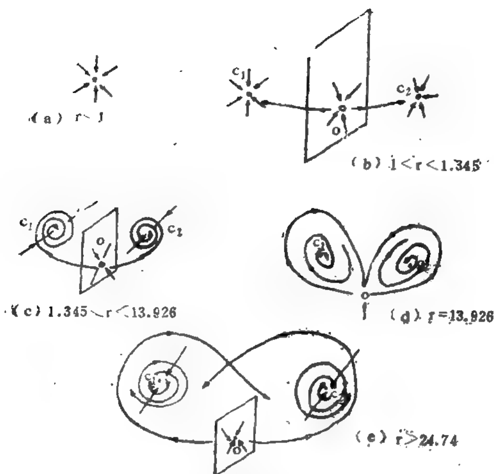


图 7.21 劳伦兹方程解形态随r的变化

并且这个区域的体积要收缩到零。这就意味着三维劳伦兹系统的流所产生的点集的维数要小于3，但按邦加莱一本德森（Bendixson）定理，在二维空间中吸引子只能是不动点和极限环。所以劳伦兹吸引子的维数介于2和3之间，或分数维空间中，这在第八章中将讨论。

这里我们再一次强调，象劳伦兹吸引子在某些方向上收缩其体积时，但是却沿着另一方向伸长，为了保持在有界的区域内，这个体积元只有折迭。这种伸长折迭的过程就产生

浑沌运动。

1976年法国天文学家埃隆(Henoń) 提出如下的二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{7.90}$$

或令$Y_n = by_n$，映射（7.90）也可以化为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + Y_n - ax_n^2 \\ Y_{n+1} = bx_n \end{cases} \tag{7.91}$$

映射（7.91）的雅可比行列式是

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial Y_n} \\ \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b \tag{7.92}$$

若$|b| < 1$就意味着面积是收缩的，或是说耗散的。即平面（x_n, y_n）上的面积每迭代一次就收缩b倍，（7.92）式中的负号说明面积边界的指向在迭代过程中改变。埃隆在计算中取$a = 1.4$，$b = 0.3$。

在（7.90）式中令$x_{n+1} = x_n$，$y_{n+1} = y_n$即得到不动点满足二次方程

$$1.4x_n^2 + 0.7x_n - 1 = 0 \tag{7.93}$$

由此解出$x_n = 0.631$和$x_n = -1.131$，从而$y_n = 0.631$和$y_n = -1.131$。故（7.89）式有两个不动点

$$A(0.631,\ 0.631),\quad B(-1.131,\ -1.131) \tag{7.94}$$

A点的稳定性由雅可比矩阵（7.92）的特征值决定：

$$\begin{pmatrix} -2.8\times 0.631 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.95}$$

矩阵（7.95）有两个特征值$\lambda_1 = \quad 1.924$和$\lambda_2 = 0.156$。它们所对应的特征向量分别为（-1.924，1）以及（0.156，1）。由于$|\lambda_1| > 1$，因而A点是不稳定的，相当于鞍点。两个特征向量分别形成不稳定流形M^u和稳定流形M^s，见图7.22。

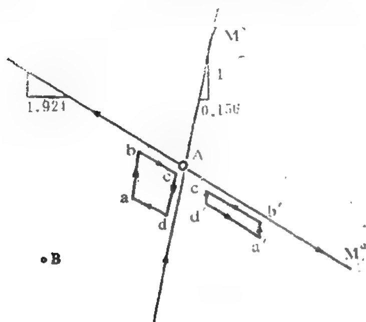


图 7.22 埃隆映射

那么A点附近M^u上的点经过反复迭代将远离A点，M^s上的点反复迭代将趋近A点，平面上任意点（除A、B外）经映射将趋向于M^u。例如平面上一平行四边形$abcd$，经映射后成$a'b'c'd'$，在不稳定流形上拉长了1.924倍且到了A的另一侧，在稳定流形方向上压缩了0.156倍，在A的同一侧。面积收缩到原先的0.3倍，走向相反。

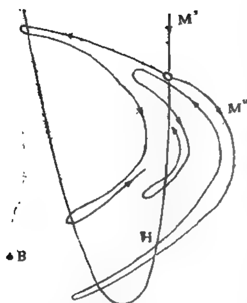


图 7.23 埃隆吸引子

经过若干次迭代，点集（x_n, y_n）就是一条（挖去A点）无限长的不封闭曲线，无限多次盘旋弯曲（不自相交割）但又能被圈于一个面积趋于零的区域内，无限接近于M^*，这就叫埃隆吸引子，其示意图如图7.23。

这种迭代过程的每一次迭代可以看成是有如下四步组成（见图7.24）：1.第一步由于A点的局部不稳定，它将一个原来形状为PQRS的四边形拉长且压缩，面积缩小0.3倍；2.第二步；因为$|J|$是负的，将图形左右翻身；3.由于整体上面积收缩，故将图形折迭成曲边四边形；4.再放进原PQRS内。

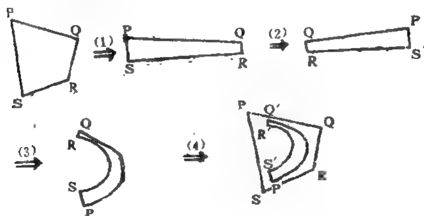


图 7.24 埃隆映射的分解

这种伸长折迭进行若干次以后就形成奇怪吸引子，初始在M^u上相近的两点，迭代一次两点间的距离大致放大两倍（特征值是－1.924），再迭代一次这个距离又放大，由于伸长折迭，曲线迂回盘旋，两点间沿曲线量的距离十分长（可能在xy平面上实际距离很近），因此n很大时，点(x_n, y_n)的确切位置就不清楚了，这就是对初始条件的敏感性。

这种伸长折迭使A点的不稳定流形M^u和稳定流形M^s有无穷多次相交，其交点就是第三章提到过的同宿点（homoclinic Poin)，如图7.23中的H点。

这种伸长折迭的结果，使点附近的一小块区域abcd变成一个马蹄形，见图7.25(c)，它和原正方形的相交部份是图7.25(c)中的阴暗部分，这个阴暗部分实际上是由原来矩形中的两横长条阴暗部份来的，见图7.25(a)(b)。这两个横长条可以看成是原来矩形的abcd的逆变换，图7.25(a)和7.25(c)两个阴暗部份就交出四个小方块，见图7.25(d)，这就是说经过了一次马蹄变换。

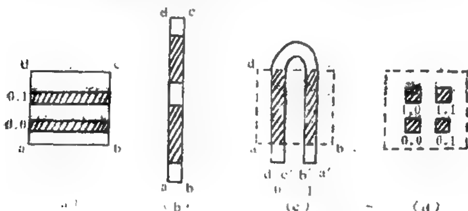


图 7.25　马蹄变换

若在图7.25(a)中的两个横小条上分别标上0.1和0.0，图7.25(c)中的两个竖小条上分别标上0和1，则图7.24(d)

中的四个小方块就可以标记成1.0，1.1，0.0，0.1。它们可以看成是原来的小数点向右移一位造成的。这和一维映射中相似，所以可以用符号动力学来研究浑沌。

数学上已经证明有了马蹄或有了同宿点就有浑沌，这实际上就是§3中介绍的伸长和折迭的结果。

与劳伦兹吸引子相类似，埃隆吸引子最终要收缩到面积为零的有界区域，因而它的维数要小于2，同时该吸引子似乎是由长度拉得很长的线段组成，故它的维数介于1和2之间。

§7 浑沌运动的特征——正李雅普诺夫特征指数

前面我们介绍了浑沌的发生模型以及两个著名的吸引子：劳伦兹吸引子和埃隆吸引子。本节说明浑沌的定量表征。

正的李雅普洛夫特征函数是浑沌的主要特征。拿一维映射

$$x_{n+1}=f(x_n) \tag{7.96}$$

来讲，所谓敏感初条件前面已经知道是初始条件 x_0 稍有差别 δx_0，那么 n 次迭代以后就要指数分离，见图 7.26。从图 7.26看出

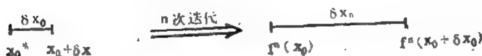


图 7.26 李雅普诺夫特征指数的定义

$$\delta x_n=|f^n(x_0+\delta x_0)-f^n(x_0)|$$

$$= \frac{df^n(x_0)}{dx}\cdot\delta x_0 = e^{LE\cdot n}\delta x_0 \qquad (7.97)$$

其中LE就称为李雅普诺夫特征指数。由（7.97）式得到

$$LE = \frac{1}{n}\ln\frac{\delta x_n}{\delta x_0} = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{df^n(x_0)}{dx}\right| \qquad (7.98)$$

所以LE代表相邻点之间距离的平均辐散率。因为

$$\frac{df^n(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx}\cdot\frac{df(x_1)}{dx}\cdot\frac{df(x_2)}{dx}\cdots\cdots\frac{df(x_{n-1})}{dx} \qquad (7.99)$$

其中

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)\cdots\cdots$$

故

$$LE = \frac{1}{n}\ln\left|\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)| \qquad (7.100)$$

从§3讨论可知，对于稳定的不动点有$\left|\frac{df}{dx}\right| < 1$，因而从（7.98）式和（7.100）式知$LE<0$。对于稳定的周期$n$，它是映射$x = f^n(x)$的不动点，因而也有$LE<0$。对于周期倍分岔的分岔点，它有$\left|\frac{df}{dx}\right| = 1$，故$LE = 0$。只有浑沌时，由于敏感初条件有$LE>0$，这是区分浑沌和其它吸引子的主要特征。

正的李雅普诺夫特征指数也就是信息量的损失。例如我们考虑一维映射，设x_0是初条件，它以相同的概率$P_i = \frac{1}{n}$出现在将[0，1]n等分的小区间内。则测量x_0的信息量为

$$I_0 = -\sum_i P_i \log_2 P_i$$

$$= -\sum_i \frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}$$

$$=\log_2 n \tag{7.101}$$

若概率P_i愈小（即n愈大），即区间[0，1]分得愈细，x_0落在哪个区间就知道得愈少，那么就包含有较多的信息。也就是说测量上增加了分辨率也就提高了信息量。减少n到$n=1$（$P_i=1$），那么x_0就一定落在[0，1]内，这是一个确定的结果，因而信息就等于零。

那么x_0经过映射以后，信息又如何变化呢？见图7.27。

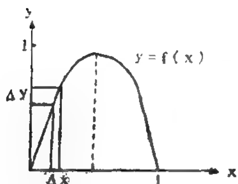


图 7.27　信息损失

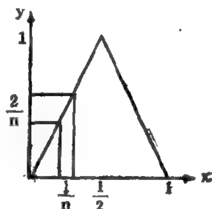


图 7.28　帐蓬映射的信息损失

由于x轴上的小间格Δx，经过映射后变成y轴的小间隔Δy，若斜率愈大，则Δy愈大所提供的信息愈少。例如图7.28的帐蓬映射

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & 0\leqslant x_n\leqslant 0.5\\ 2(1-x_n) & 0.5<x_n\leqslant 1\end{cases} \tag{7.102}$$

由于斜率等于2，因而概率增加一倍，导致分辨率下降，信息就损失，一次迭代后信息变化为

$$\Delta I = I_1 - I_0 = -\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n} \log_2 \frac{2}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n}$$

$$= -\log_2 2 = -1\text{bit} = -\log_2 \left| \frac{dy}{dx} \right| \qquad (7.103)$$

即信息量减少1bit。

将表达式（7.103）推广到每一点斜率$f'(x)$是变化的映射情况下，许多次迭代的平均信息损失

$$\overline{\Delta I} = -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |f'(x_i)| \qquad (7.104)$$

将（7.100）式和（7.104）式比较得出LE和$\overline{\Delta I}$的关系为

$$LE = \ln 2 \cdot |\overline{\Delta I}| \qquad (7.105)$$

即李雅普诺夫特征指数正比于信息量的损失$\overline{\Delta I}$。

例如帐蓬映射（7.102），有

$$\delta x_n = \left| \frac{df^n}{dx} \right| \delta x_0$$

$$= \left(\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \cdot \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_1} \cdots\cdots \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_{n-1}} \right) \cdot$$

$$\delta x_0 = 2^n \cdot \delta x_0 \qquad (7.106)$$

据（7.98）式有

$$LE = \frac{1}{n} \ln 2^n = \ln 2 \qquad (7.107)$$

这和用$\Delta I = -1$代入（7.105）式的结果完全一样。

对映射（7.102)式，若取$x_n = 0$，$\frac{1}{2}$和1，那么x_{n+1}就分别是0，1，0。因此可以将映射看成是由两步组成的：第一步是将间格〔0，1〕均匀伸长为两倍，第二步将伸长的间隔再折迭起来成原间隔〔0．1〕，如图7.29。这里伸长的特性最终

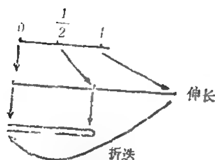


图 7.29 帐蓬映射的伸长折迭

导致相邻点的指数分离，即敏感初条件，这里折迭的特性保持序列有界，而且引起映射不可逆。

若用二进制解释信息丧失就更清楚了。若x_n的第一位小数是0（表示该数小于$\frac{1}{2}$），则映射（7.102）算出的x_{n+1}是x_n向右挪一位小数的结果。若x_n的第一位小数是1（就表示该数大于$\frac{1}{2}$），则x_{n+1}就是先将x_n小数中的0换成1，1换成0，而后将小数向左挪一位的结果。例如$x_0=0.01011$(表示1/32)，则$x_{n+1}=0.1011$；若$x_0=0.1011$(表示11/16)，则$x_{n+1}=0.101$。因此每迭代一次小数丧失一位。

帐蓬映射（7.102）出现正的李雅普诺夫特征指数是浑沌的必然结果，事实上浑沌发生模型（7.15）取$\mu=4$时就为

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n) \tag{7.108}$$

若作变换

$$x=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right),\quad 0\leqslant y\leqslant 1 \tag{7.109}$$

将（7.109）式代入（7.108）式得到

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_{n+1}\right)=\sin^2\left[2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\right] \tag{7.110}$$

因而

$$y_{n+1}=\begin{cases}2y_n & 0\leqslant y_n\leqslant 0.5\\ 2(1-y_n) & 0.5<y_n\leqslant 1.0\end{cases} \tag{7.111}$$

（7.111）式就是帐逢映射。

对二维映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=f_1(x_n,\ y_n) \\ y_{n+1}=f_2(x_n,\ y_n) \end{cases} \tag{7.112}$$

其浑沌也可以用李雅普诺夫特征指数来表征。若初始值x_0和y_0的偏差为δx_0和δy_0，则

$$\begin{pmatrix}\delta x_n\\ \delta y_n\end{pmatrix}=J_{n-1}\begin{pmatrix}\delta x_{n-1}\\ \delta y_{n-1}\end{pmatrix}=J_{n-1}\cdot J_{n-2}\begin{pmatrix}\delta x_{n-2}\\ \delta y_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots\cdots$$

$$=J_{n-1}\cdot J_{n-2}\cdot J_{n-3}\cdots\cdots J_0\begin{pmatrix}\delta x_0\\ \delta y_0\end{pmatrix} \tag{7.113}$$

其中J_{n-1}，$J_{n-2}\cdots\cdots J_0$分别是（7.112）的雅可比矩阵

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n}\end{pmatrix} \tag{7.114}$$

在点（x_{n-1}，y_{n-1}），（x_{n-2}，y_{n-2}）$\cdots\cdots$（$x_0 y_0$）处取值的矩阵。因此若矩阵

$$J=J_{n-1}\cdot J_{n-2}\cdots\cdots J_0 \tag{7.115}$$

的特征值为λ_1和λ_2，则和（7.98）式类似有

$$LE_1=\frac{1}{n}\ln|\lambda_1|,\qquad LE_2=\frac{1}{n}\ln|\lambda_2| \tag{7.116}$$

LE_1和LE_2就是二维映射（7.114）的二个李雅普诺夫特征指数。因为雅可比矩阵随点变化，所以求J的特征值是比较困难的，若令

$$\Delta x_i = \begin{pmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{pmatrix} \qquad i=0,\ 1,\ \cdots n \tag{7.117}$$

为矩阵J_0，$J_1 \cdots J_{n-1}$的特征向量，则有

$$\frac{\|\Delta x_n\|}{\|\Delta x_0\|} = \frac{\|\Delta x_n\|}{\|\Delta x_{n-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta x_{n-1}\|}{\|\Delta x_{n-2}\|} \cdots\cdots \frac{\|\Delta x_1\|}{\|\Delta x_0\|}$$

$$= \mu_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdots\cdots \mu_0 \tag{7.118}$$

其中符号$\| \ \|$代表向量的模，而μ_{n-1}，$\mu_{n-2} \cdots \mu_0$分别是雅可比矩阵J_{n-1}，J_{n-2}，$\cdots J_0$的特征值，故由（7.98）式得

$$LE = \frac{1}{n} \ln(\|\Delta x_n\| / \|\Delta x_0\|)$$

$$= \frac{1}{n} \ln(\mu_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdots \mu_0)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \mu_i \tag{7.119}$$

对于埃隆映射（7.90）或（7.91），因为（7.92）式说明所有J_i的两个特征值的乘积等于$-b$（而b小于1），故μ的两个值中一个$|\mu|>1$，另一个$|\mu|<1$。因而由（7.119）式有

$$LE_1>0,\ LE_2<0 \tag{7.120}$$

前者相应于所有$|\mu_i|>1$的情况，后者相应于所有$|\mu_i|<1$的情况。$LE_1>0$正反应埃隆映射敏感初条件的浑沌性质。

前面讨论的是映射，现在讨论n维流的动力系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n) \quad i=1,\ 2,\ \cdots n \tag{7.121}$$

它的解在相空间形成一轨道$x(t)$，若初始值$x(0)$有一偏差$W(0)$，则由$x(0)+W(0)$出发就形成另

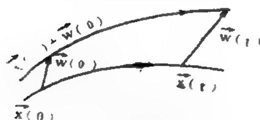


图 7.30　轨道的指数分离

一轨道，见图7.3。我们就是要研究$W(t)$是如何随时间演变的，$W(t)$叫切空间的向量，它应满足方程

$$\dot{W}_i = JW_i, \quad i=1, 2, \cdots n \tag{7.122}$$

其中J是系统（7.121）的雅可比矩阵。

若初始时刻$W(0)$的长度为$\|W(0)\|$，t时刻以后$W(t)$的长度为$\|W(t)\|$，则设

$$\|W(t)\| = e^{(LE)\cdot t}\|W(0)\| \tag{7.123}$$

则

$$LE = \frac{1}{t}\ln\frac{\|W(t)\|}{\|W(0)\|} \tag{7.124}$$

就是n维流的李雅普诺夫特征指数，它代表相邻轨道在相空间的平均指数辐散率。若$W(t)$的空间（叫切空间）是n维的，W在每个基底上有分量，对每一个分量均可按(7.124)式求出一个LE，因此共有n个LE，它们按大小次序排列有

$$LE_1 \geqslant LE_2 \geqslant \cdots\cdots \geqslant LE_n$$

这n个数称为李雅普诺夫特征指数的谱。显然若J是常数矩阵，则LE就是J的特征值λ的实部$\mathrm{Re}\{\lambda\}$。

上面讨论了轨道间"长度"的辐散率，对于"面积"的辐散率是什么呢，由

$$\begin{cases} W_1(t) = e^{LE_1\cdot t}W_1(0) \\ W_2(t) = e^{LE_2\cdot t}W_2(0) \end{cases} \tag{7.125}$$

将（7.125）两式相乘就得到面积$A(t)=W_1\cdot W_2$的演变为

$$A(t) = e^{(LE_1+LE_2)t}\,A(0) \tag{7.126}$$

故

$$LE_1 + LE_2 = \frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A(0)} \tag{7.127}$$

就代表平均"面积"辐散率。类似，相邻轨道"体积"辐散

率为

$$LE_1+LE_2+LE_3=\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} \tag{7.128}$$

一般n维体积的辐散率

$$LE_1+LE_2+\cdots+LE_n=\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} \tag{7.129}$$

据（7.66）式，n维体积变化率为

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=T_rJ(t) \tag{7.130}$$

其中T_r是雅可比矩阵的迹。将（7.130）式两边对t积分得

$$\ln\frac{V(t)}{V(0)}=\int_0^t T_rJ(t)dt \tag{7.131}$$

（7.129）式和（7.131）式比较得到

$$\sum_{i=1}^{n}LE_i=\frac{1}{t}\int_0^t T_rJ(t')dt' \tag{7.132}$$

若雅可比矩阵是常数矩阵，则

$$\sum_{i=1}^{n}LE_i=T_rJ=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=\mathrm{div}\,v \tag{7.133}$$

（7.133）式说明所有李雅普诺夫特征指数之和是相空间向量场$v(\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \cdots\cdots\dot{x}_n)$的散度。例如对劳伦兹方程（7.65）有

$$LE_1+LE_2+LE_3=-(\sigma+1+b)<0 \tag{7.134}$$

前面已经提到劳伦兹吸引子有局部不稳定的伸长性质，这就意味着$LE_1>0$。

由于浑沌有正的李雅普诺夫特征指数，所以它是区分不同吸引子的重要标志。例如第三章中图3.7(a)和图3.7(b)的定常吸引子，它们的李雅普诺夫特征指数谱为(－，－，－)，这三个负号表示在每个方向上都是收缩的。对图3.8的极限环周期吸引子，它的李雅普诺夫特征指数谱是(0，－，－)，

其中$LE_1=0$表示沿极限环方向长度不辐散也不收敛，$LE_2<0$，$LE_3<0$ 表示横截极限环的两个方向轨迹应收敛到极限环。对图3.9的二维环面上的周期运动，李雅普诺夫特征指数谱是（0，0，－），其中$LE_1=0$，$LE_2=0$分别表示沿环面上两个方向φ_1和φ_2的运动，而$LE_3<0$表示环面外两边的轨迹都收敛到环面上。对图3.12的奇怪吸引子，它的李雅普诺夫特征指数谱为（＋，0，－），其中$LE_1>0$表示敏感初条件的伸长性质，$LE_2=0$表示沿流的方向不辐散，$LE_3<0$表示吸引的折迭性。明显看出，四种吸引子中只有奇怪吸引子的LE_1为正，这是浑沌的独有特征。见图7.31。

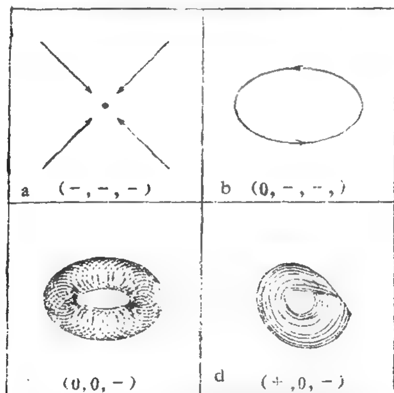


图 7.31 四种吸引子的李雅普诺夫特征指数谱
（LE＝0表示沿速度方向）

第八章我们会看到分数维只是说明在充分长的时间后一个吸引子在某个时刻t_1的信息。而再经过一段时间到达t_2，在t_2-t_1时刻内信息的变化或信息流率，则是用和李雅普诺夫特征指数有关的量——哥尔莫戈洛夫(Kolmogorov)熵(或测度熵) K来描述。K通常定义为所有正的李雅普诺夫特征指数的和，即

$$K=\sum_i LE_i \quad (LE_i>0) \tag{7.135}$$

对于可预测的系统，长时间以后信息不增加也不减少，因而$K=0$。对于完全随机的布朗运动，即使完全知道某个瞬时的状态，我们也不能预测下一时刻状态，信息流$K\to\infty$。而只有对浑沌来说，信息流K取某一确定的正值。

§8 邦加莱截面

从第三章的动力系统形态中就可以看出，对复杂形态我们研究其轨道是非常困难的。这时就要用邦加莱截面方法来研究。

这种方法将动力系统的轨迹化成轨迹与一个横截面（邦加莱截面）的交点来研究。图7.32是该方法的示意图。图中三维空间的轨线以一定演化的方向（$\dot{z}<0$）与$z=$常数的横截面S依次相交于P_0，P_1、P_2……各点，而形成一个邦加莱映射

$$P_{K+1}=T(P_K)=T(T(P_{K-1}))=T^2(P_{K-1})=\cdots\cdots \tag{7.136}$$

这样就将一个连续的时间演化转变为一个离散的映射，这给研究带来很大的方便。而且映射(7.136)保持原连续动力系统的拓扑性质。例如，若原来动力系统是耗散的，则相空间体积是收缩的，那么映射T在邦加莱截面S上同样要收缩面积。

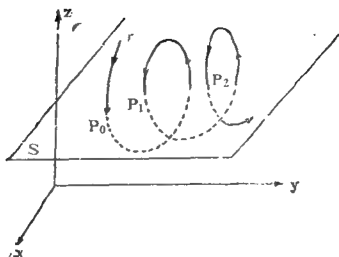


图 7.32 邦加莱截面的说明

若原来动力系统是守恒的或哈密顿系统，则映射T要面积守恒。下面我们将看到，耗散系统的四种吸引子也会在邦加莱截面上反映其相应的结构。邦加莱截面方法的优点是明显的，它将相空间的维数（或坐标）减少一个，同时映射T是差分方程，它是易解决的。而且它将必要的资料量大大减少（因为轨道上的几乎所有点都忽略了）。

对于周期吸引子，其邦加莱截面就化为一个单一的点P_0。若是在环面上的周期运动，则邦加莱截面上为相应的几个点。这些点是映射的不动点（见图7.33）。

$$P_0 = T\ (P_0)\ = T^2\ (P_0)\ = \cdots\cdots \qquad (7.137)$$

而且周期解的稳定性就可以通过第四章介绍的夫洛开单位圆来研究。

对于拟周期运动，例如在二维环面上的运动，它由两个频率f_1和f_2迭加而成，其中f_1是沿柱轴的旋转，f_2是围绕柱轴的旋转，见图7.34。

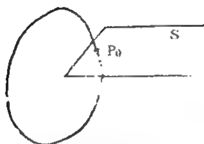


图 7.33 极限环的邦加莱截面

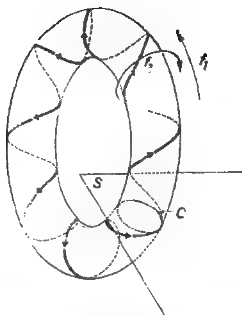


图 7.34 二维环面和它的邦加莱截面

从图上看出，轨迹与横截柱轴的邦加莱截面S相交形成一个闭合曲线C。该曲线C或是简单的无自相交的点，如圆、椭圆等，或者类似数字 8 的形状或圆滚线，见图7.35。



图 7.35 拟周期运动的邦加莱截面的形

当f_1/f_2是无理数时，该曲线C是连续的。若f_1/f_2为有理数时，则邦加莱截面是沿着C的有限点集。特别若$f_1/f_2=\frac{n_1}{n_2}$

（n_1和n_2为两个整数时），这时形成频率锁相，正象图3.9和图3.10说明的那样，这实际上是周期吸引子，其周期为$T=\frac{n_1}{f_1}=\frac{n_2}{f_2}$，邦加莱截面上仅有$n$个离散的点。

对于非周期的浑沌吸引子，其邦加莱截面是沿一条线段或一曲线弧的分布点集。图7.36是浑沌吸引子的邦加莱截面图象。



图 7.36 浑沌吸引子的邦加莱截面

§9 显示浑沌的其它动力系统

在§6节我们介绍了两个典型的显示浑沌的动力系统——

劳伦兹吸引子和浑沌吸引子，除此之外在许多自然科学领域也相应建立了各自的浑沌模型。下面列出几个以供参考。

1.地球磁场逆转的问题

在整个地质年代有不规则的变化以及地球磁场的逆转，这个问题可以用圆盘发电机理论去模拟。将适当的磁流体力学偏微分方程加以截谱导得的方程为

$$\begin{cases} \dot{x}=a\ (y-x) \\ \dot{y}=xz-y \\ \dot{z}=b-xy-cz \end{cases} \tag{7.138}$$

式中x，y和地极位势及圆环磁场分量有关，z和角动量矩有关；a，b，c是正参数，且$b>\dfrac{ac\ (a+c+3)}{(a-1-c)}$。

方程组（7.138）和劳伦兹方程很类似。图7.37是参数值$a=14.625$，$b=1.0$，$c=5.0$时奇怪吸引子在xy平面，yz平面和xz平面上的投影。

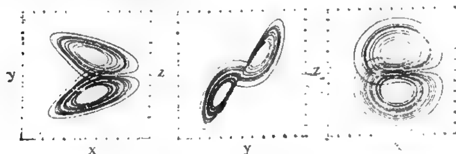


图 7.37　(7.138) 式的奇怪吸引子在 xy，yz，xz平面上投影

（所有轴都是从－12到12）

2.罗塞尔（Rössler）吸引子

这也是三个变量的常微分方程动力系统

$$\dot{x} = -(y+z)$$
$$\dot{y} = x + ay \qquad (7.139)$$
$$\dot{z} = b + z(x-c)$$

（7.139）式中仅有一个非线性项，参数$a = b = 0.2$，c为分岔参数。当$c = 5.7$时显示出浑沌，和劳伦兹吸引子不同，它只围绕一个圆旋转，在外面螺旋两次后，又沿负z方向折回到内部。图7.38是罗塞尔吸引子的典型构造。参数值c从2

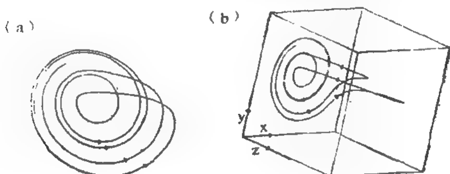


图 7.38 罗塞尔吸引子。(a)在xy平面投影；(b)在三维空间中的吸引子（x和y轴从-14到14，z轴从0到28）

到4.2变化时，从周期1经过一系列周期倍分岔，在其累积点（刚大于$c = 4.20$）处浑沌出现。图7.39显示其倍分岔过程进入浑沌。

3.化学动力学系统

包含至多二阶化学反应的化学动力学系统可以表示为

$$\dot{x} = x(a - k_1 x - z - y) + k_2 y^2 + a_3$$
$$\dot{y} = y(x - k_2 y - a_5) + a_2 \qquad (7.140)$$
$$\dot{z} = z(a_4 - x - k_5 z) + a_3$$

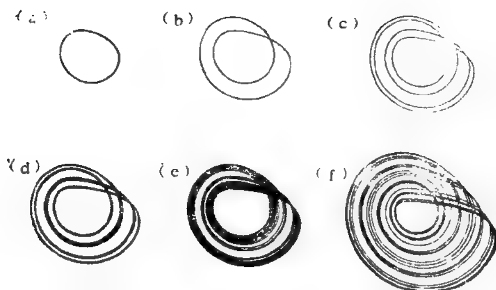


图 7.39 通过周期倍分岔产生罗塞尔吸引子，均是在xy平面上投影
(a)c = 2.4, (b)c = 3.5, (c)c = 4.0, (d)c = 4.23, (e)c = 0.3, (f)c = 5.0

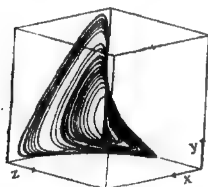


图 7.40 (7.140) 式的奇怪吸引子 (x和y轴从0到100，z轴从0到50)

其中x,y,z是化学成份浓度，a_i是保持常数的反应物浓度（开放系统），k_i是速率常数，a_i，k_i都是正数。图 7.40是参数值取$k_1 = 0.25$，$k_2 = 0.001$，$k_3 = 0.5$，$a_1 = 30$，$a_2 = a_3 = 0.01$，$a_4 = 16.5$，$a_5 = 10$时显示出的浑沌。

4.超浑沌系统

前面三个例子都是三维的，因此显示出的浑沌具有一个正李雅普诺夫特征指数。现在是一个四维系统，它显示出的浑沌有两个正的李雅普诺夫

特征指数，所以称为超浑沌（hyPerchaos）。其方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y-z \\
\dot{y} &= x+0.25y+w \\
\dot{z} &= 3+xz \\
\dot{w} &= -0.5z+0.05w
\end{aligned}
\tag{7.141}
$$

图7.41为该浑沌吸引子在xyz，xyw，zyw和zxw空间中的表现。

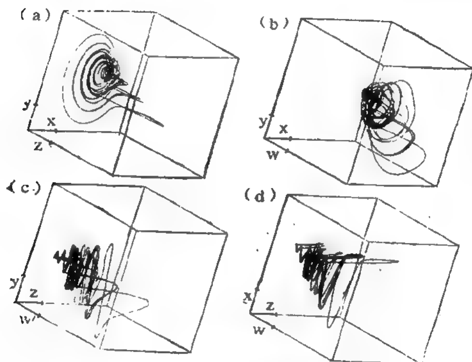


图 7.41 （7.141）式的奇怪吸引子在三维空间中的表现

（x轴从-110到40，y轴从-60到60，z轴从0到280，w轴从0到170）

5.强迫的非线性振荡

(a)强迫的杜芬方程为

$$\ddot{x}+a\dot{x}+x^3=b\cos t \tag{7.142}$$

式中a和b都是正的，且$a<1$，$b<25$。令$\dot{x}=y$，则方程（7.142）化为

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-ay-x^3+b\cos t \end{cases} \tag{7.143}$$

系统（7.142）和（7.143）有丰富的周期解，见图7.42。而且（a，b）值相同时，仅仅初条件不同可能有不同的周期解，见图7.42（e）和（f）。图7.42是在较长时间（$t>200$）积分之后，去除了所有暂瞬过程而绘制在xy平面上的。

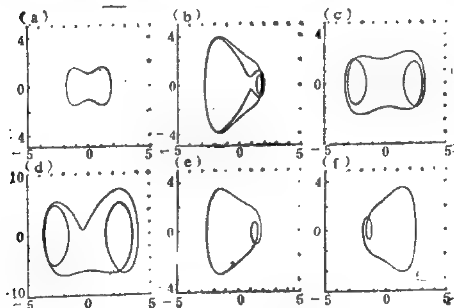


图 7.42 系统（7.143）的周期解

(a) a=0.3, b=2.0 (b) a=0.2, b=5.0 (c) a=0.2 b=16.5 (d) a=0.2, b=23.5 (e)和(f) a=0.10, b=3.5，但初条件不同

当a值固定后，b值不断增加可以看到从周期到浑沌以及周期解之间变化，见图7.43。

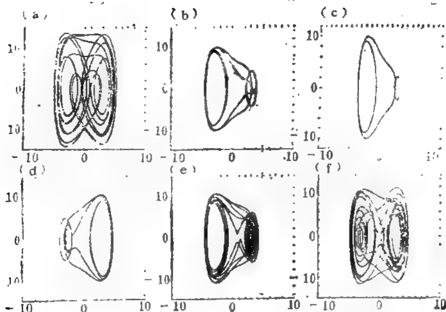


图 7.43 系统（7.143）的浑沌和周期解，初条件 $x_0=0.3$，$y_0=0.5$；$a=0.3$，b为：(a)30.75，(b) 31.0，(c)31.0，(d)=32，(e)33，(f)34.0

(b)强迫负阻尼振荡

其形式为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=a\ (1-x^2)\ y-x^3+b\cos(ft)\end{cases}\tag{7.144}$$

该系统当b和f取不同值时可以有周期解、拟周期解和浑沌解，见图7.44。

(c)强迫布鲁塞尔振子（Brusselator）

它反映自催化非平衡化学反应。方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A+x^2y-Bx-x+a\cos(ft)\\ \dot{y}&=Bx-x^2y\end{aligned}\tag{7.145}$$

当$a=0.05$时，不断地增加f，可以看到周期倍分岔到浑沌

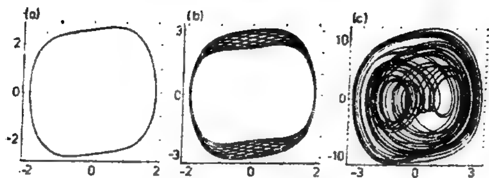


图 7.44 系统(7.144)的吸引子

(a) b = 0, f = 1.617 周期吸引子

(b) b = 1.0, f = 4.0 拟周期吸引子

(c) b = 17, f = 4.0 浑沌吸引子

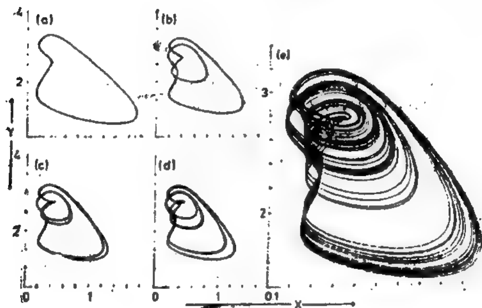


图 7.45 强迫布鲁塞尔振子系统(7.145)中的周期倍分岔到浑沌

A = 0.4, B = 1.2, a = 0.05, f值为

(a)0.6, (b)0.8, (c)0.83, (d)0.84, (e)0.95

的过程，见图7.45。

(d)糖酵解振荡

它是一个复杂的生化过程，其简单模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + f(t) \\ \dot{y} = xy^2 - y \end{cases} \tag{7.146}$$

其中强迫项$f(t) = a + b\cos(\omega x)$。当取$a = 0.999$，$b = 0.42$时，$\omega$改变后可以看到周期解、拟周期解和浑沌解。见图7.46。

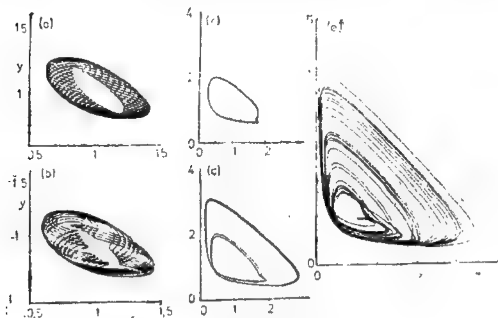


图 7.46 系统(7.146)的吸引子，ω值为：

(a)$\omega = 4.5$ 拟周期吸引子

(b)$\omega = 3.5$ 拟周期吸引子

(c)$\omega = 2.0$
(d)$\omega = 1.8$ 周期倍分岔

(e)$\omega = 1.75$ 浑沌吸引子

6.生态学的伏尔泰拉 (vorterra) 模型

过去生态学中的伏尔泰拉模型是描述捕食者和被捕食者两者的相互作用，导得极限环形态。若考虑三种群体的相互

作用，则伏尔泰拉模型为

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x[0.5(1-x)+0.5(1-y)+0.1(1-z)] \\
\dot{y} &= y[0.5(1-x)-0.1(1-y)+0.1(1-z)] \\
\dot{z} &= z[\mu(1-x)+0.1(1-y)+0.1(1-z)]
\end{aligned}
\tag{7.147}
$$

则控制参数$\mu=1.43$时就会出现浑沌。

7.流体湍流的夫伦谢希里(Franceshini)模型

将流体力学的纳维-斯托克司方程截断成五维模型

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -2x_1+4x_2x_3+4x_4x_5 \\
\dot{x}_2 = -9x_2+3x_1x_3 \\
\dot{x}_3 = -5x_3-7x_1x_2+\mathrm{Re} \\
\dot{x}_4 = -5x_4-x_1x_5 \\
\dot{x}_5 = -x_5-3x_1x_4
\end{cases}
\tag{7.148}
$$

其中Re是控制参数雷诺数，当Re＝29时就会出现浑沌。

§10 解释湍流的困难

湍流是一种复杂现象，它是如何发生的，至今仍不完全清楚。但是，浑沌现象的发现，对揭示湍流有很大的启发。

过去主要用线性稳定度的概念来说明湍流发生的原因。从平面泊索叶（Poiseuille）流为例。两无限长平板分别位于y_1和y_2处，其间的流动可以用二维不可压缩涡度方程

$$
\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}
=\nu\nabla^4\psi
\tag{7.149}
$$

来描述，式中ψ是流函数，$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$分别为速度在$x$和$y$方向的分量。旋度$\nabla\times V$的垂直分量为$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\nabla^2\psi$。将方程（7.149）线性化，令

$$\psi=\overline{\psi}(y)+\psi'(x,\ y,\ t) \tag{7.150}$$

设$\overline{u}(y)=\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial y}$是Re→∞时（即无粘性）的解，且在区间（$y_1$，$y_2$）上是抛物线。将（7.150）式代入（7.149）式便得到线性方程

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial t}+\overline{u}(y)\frac{\partial\nabla^2\psi'}{\partial x}-\overline{u}''\frac{\partial\psi'}{\partial x}=\nu\nabla^4\psi' \tag{7.151}$$

为了讨论稳定性，令（7.151）式的解为

$$\psi'=\Phi(y)e^{ik(x-ct)} \tag{7.152}$$

其中k是波数，$c=c_r+ic_i$是相速度。将（7.152）式代入（7.151）式便得到著名的奥尔-沙莫弗尔（Orr-Sommerfeld）方程（简称O-S方程）

$$(\overline{u}-c)(\Phi''-k^2\Phi)-\overline{u''}\Phi=-i\frac{\nu}{k}(\Phi(4)-2k^2\Phi''+k^4\Phi) \tag{7.153}$$

它满足边条件

$$\Phi(y_1)=\Phi(y_2)=\Phi'(y_1)=\Phi'(y_2)=0 \tag{7.154}$$

对于大Re数，则O-S方程变成瑞利方程

$$\begin{cases}\Phi''-k^2\Phi-\dfrac{\overline{u''}}{\overline{u}-c}\Phi=0\\ \Phi(y_1)=\Phi(y_2)=0\end{cases} \tag{7.155}$$

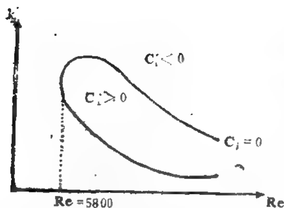


图 7.47 $c_i=0$的曲线

由方程（7.135）和（7.154）的特征值问题可以定出波数k，相速c，控制参数Re之间的一个关系

$$F(k,c,\mathrm{Re})=0 \tag{7.156}$$

对平面泊索叶流，其关系大致如图7.47。图中曲线为$c_i=0$，其内部为$c_i>0$，此时按（7.152）式扰动是不稳定的。从图上看出，这种不稳定的临界雷诺数$(\mathrm{Re})_c=5800$，即当$\mathrm{Re}>(\mathrm{Re})_c$后，流动受扰动后是不稳定的。

这里且不说扰动不稳定并不见得是湍流。即使如此，线性理论得到的临界$(\mathrm{Re})_c=5800$是太高了，实验上得出$(\mathrm{Re})_c$约为1000—2500。对平面库埃特流（一平板不动，一平面以一定速度移动）和圆管哈根（Hagen）-泊索叶流，用线性稳定性理论还找不到湍流发生的条件，而实验上却证实这两种流都可以发生湍流，且临界雷诺数约为1000左右。这说明线性稳定度理论只能说明失稳现象，而不能说明扰动的稳定性和振幅有关，更不能说明扰动失稳后变成什么形态。

1944年苏联科学家朗道（Landau）凭他对物理问题的丰富直觉及深入洞察力，在线性理论基础上大胆提出湍流发生的非线性猜想。他认为当雷诺数Re接近临界值$(\mathrm{Re})_c$时，按线性理论扰动的振幅$|A|$以指数$e^{\lambda t}$增长，其中λ的实部为

$$\mathrm{Re}(\lambda)=\sigma=k(R-R_c)+O(R-R_c)^2 \tag{7.157}$$

当$0<R-R_c<<1$时，这种不稳定的模增长很慢，而其它模

都衰减，也就是说最不稳定的模占优势。但是由于非线性的相互作用，使扰动的指数增长受到抑制，因此在线性的基础上应考虑高阶项的修正，他得到最不稳定的模振幅 $|A|$ 满足

$$\frac{d|A|}{dt}=\sigma|A|-\frac{l}{2}|A|^3 \tag{7.158}$$

或

$$\frac{d|A|^2}{dt}=2\sigma|A|^2-l|A|^4 \tag{7.159}$$

其中l叫朗道常数。将方程（7.159）除以 $|A|^4$得到

$$\frac{d|A|^{-2}}{dt}+2\sigma|A|^{-2}=l \tag{7.160}$$

它是 $|A|^{-2}$的线性方程，显式解为

$$|A|^{-2}=\frac{l}{2\sigma}+\left(A_0^{-2}-\frac{l}{2\sigma}\right)e^{-2\sigma t}$$

其中A_0是 $|A|$ 的初始值。上式可改写为

$$|A|^2=\frac{A_0^2}{\frac{l}{2\sigma}A_0^2+\left(1-\frac{l}{2\sigma}A_0^2\right)e^{-2\sigma t}}$$

$$\sigma\neq 0 \tag{7.161}$$

因此问题的性质完全取决于朗道常数l的符号。

1.$l>0$

当$R<R_c$（即$\sigma<0$），$t\to\infty$时，$|A|\to 0$；当$R>R_c$（即$\sigma>0$），$t\to\infty$时，$|A|\to\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}\doteq\sqrt{\frac{2k(R-R_c)}{l}}$。

这种情况就是第四章介绍的超临界分岔，见图7.48。

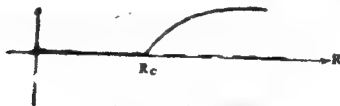


图 7.48 $l>0$时的分岔

此时$R>R_c$出现的新的状态$\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$是稳定的层流，是通向湍流的中间过渡状态。若$\mathrm{Im}(\lambda)=0$时，状态代表定常状态，若$\mathrm{Im}(\lambda)=\omega\neq 0$时，代表周期状态。象泰勒涡旋贝纳对流中，过渡到湍流就有中间层流状态。

2. $l<0$

当$R<R_c$（即$\sigma<0$）时，若$|A|<A_T=\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$时，方程（7.158）右边两项符号相反，且使右边为负，故当$t\to\infty$时，$|A|\to 0$。而当$|A|>A_T=\sqrt{\frac{2\sigma}{l}}$时，此时（7.158）式右边为正，只要$t\to\frac{1}{-2\sigma}\ln\frac{A_0^2}{A_0^2-A_T^2}$，那么$|A|\to\infty$（其中$A_0>A_T$是初始振幅）。当$R>R_c$（即$\sigma<0$）时，方程（7.158）右边两项全是正的，即$|A|$超指数增长，$|A|\to\infty$。

这里分析表明，对$l<0$情况下，当原有形态在$R>R_c$时失稳后，在$R<R_c$处只有当初始振幅$A_0>A_T$时才出现失稳现象（才可能出现新的状态）。这种情况就是第四章介绍的亚临界分岔，见图7.49。

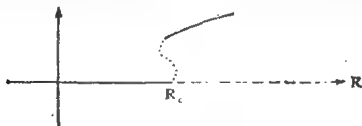


图 7.49　$l<0$时的分岔

亚临界分岔只有在有限振幅是不稳定的，而对小振幅扰动是稳定的。图7.49中坐标轴上方的一段黑线代表有滞后的亚临界分岔，参看图4.20。亚临界分岔常常不经过中间阶段，$A_0 > A_T$失稳后直接进入湍流。

总之，朗道首次用非线性分岔对湍流进行解释，这是值得称赞的。但是朗道还认为不断分岔的结果是由n个频率ω_1，$\omega_2 \cdots\cdots \omega_n$组成的运动产生的，这就是湍流，这个结论是错误的。现在湍流虽无确切定义，但从物理上考虑一般认为有三大特征：

1. 湍流具有敏感初条件；

2. 湍流的功率谱是连续谱，而不是线状的离散谱；

3. 湍流是相混的（mixing），即相关系数$R(\tau)$

$= \dfrac{\overline{u(t+\tau)u(t)}}{\overline{u^2}}$当$\tau \to \infty$时趋于零，其中$u$是湍流量。

若按湍流这三个特征看，朗道的最终n个频率组成的状态并不是湍流状态。因为若初条件变化一点，频率变化为$\omega_1 t + \alpha_1$，$\omega_2 t + \alpha_2 \cdots\cdots \omega_n t + \alpha_n$也只变化一点，不满足第一条。几个频率的谱是线谱不满足第二条，由于是线谱，$R(\tau)$也不趋于零。

§11 湍流的间歇性及通向湍流的道路

湍流的发生可能是比较复杂的问题，但是浑沌理论以及很多实验都证实，到达湍流状态以前可能要经过许多中间阶段。这反应了湍流的时空结构，近代的湍流观测和实验说明，湍流常伴有空间上和层流相间，时间上常伴有断断续续的间歇现象。为了清楚起见，我们再回到一维迭代模型（7.15）式。在第四节中已说明，参数位$\mu = 1 + \sqrt{8} =$

3.828处存在周期3的窗口，即

$$x = f^{(3)} = f\left(f(f(x))\right) \qquad (7.162)$$

是周期3的不动点。图7.50绘出了μ稍小于和稍大于$1+\sqrt{8}$时映射$f^{(3)}$的图象。当μ稍小于$1+\sqrt{8}$时(图中实线)，

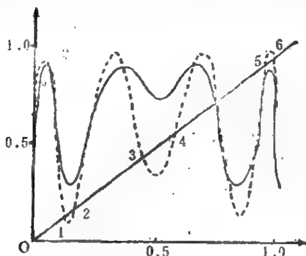


图 7.50 迭代映射(7.15)的$f^{(3)}$图象

实线 $\mu<1+\sqrt{8}$

虚线 $\mu>1+\sqrt{8}$

$y=f^{(3)}$和$y=x$仅有两个交点O和A，它们即为$x=f(x)$的不动点。当μ稍大于$1+\sqrt{8}$时（图中虚线），$y=f^{(3)}$和$y=x$有八个交点，除去原有的两个不动点O和A以外，还有两个周期3。其中一个是稳定的，如图上的1，3，6三个点，它们均有$|f^{(3)'}(x)|<1$。另一个是不稳定的，如图上的2，4，5三个点，它们均有$|f^{(3)'}(x)|>1$。刚刚在$\mu=1+\sqrt{8}$时，不稳定的周期3（鞍点）和稳定的周期3（结点）从倒分岔上看合并成复杂的平衡点（即重根），见图7.51。这就是描述鞍-结点岔分。这三个复杂的不动点满足方程

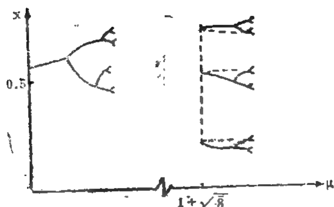


图 7.51 两个周期3在$\mu=1+\sqrt{8}$并合

$$343x^3-49(10+\sqrt{2})x^2+7(13+16\sqrt{2})x-(41\sqrt{2}-31)=0 \qquad (7.163)$$

即$x_1=0.1599$，$x_2=0.5136$，$x_3=0.9563$。因此当μ小于但非常接近$1+\sqrt{8}$时，$y=f^{(3)}$与$y=x$之间形成一个很窄的走廊，见图7.52，图中的曲线只是图7.50中靠近不动点1和2之间的一段。

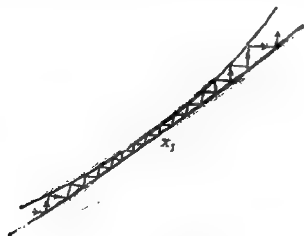


图 7.52 窄走廊中的滞留

在迭代过程中每三次将接近x_1一次，而且接近x_1时要经过多次迭代（在走廊中滞留很长时间）才穿出走廊而进入周期3的另一靠近x_3的窄走廊。发生相同情况的滞以后，又进入靠近x_2的窄走廊。所以以上过程出现一阵清楚，一阵浑沌的阵发现象。在窄道中走时，好象接近于周期3解（例如x_1），时间序列上看好象是一较为平稳的围绕x_1附近的层流状态，穿出走廊后似乎进入浑沌状态。这就是间歇现象（intermittency）。从μ增大进入窗口的方向看，间歇现象是出现周期解的一种前兆。反之，从μ减小进入浑沌的方向看，它是周期解留下的“后遗症”，即浑沌的先兆（预湍流）。

从分岔的角度看，这种间歇性的产生属于图4.30(c)的鞍-结点分岔，常叫类型Ⅰ的间歇性。它的特点是规则的相、拟周期的状态（层流状态）时时被不规则的相（湍流状态）所打断。类型Ⅰ间歇性的典型映射为

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon+x_n^2 \qquad (7.164)$$

其中$\varepsilon=\mu-\mu_c$，μ_c是映射和$y=x$相切时的参数值，对映射(7.15)，$\mu_c=1+\sqrt{8}$。对$\varepsilon=0$（即$\mu=\mu_c$），映射(7.164)有重根$x_n=0$，且夫洛开乘子$\left.\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=1$，即图4.30(c)上标明的地方。对$\varepsilon\neq0$，映射(7.164)有两个不动点$x_n=\sqrt{\varepsilon}$和$x_n=-\sqrt{\varepsilon}$，它们仅仅在$\varepsilon>0$（即$\mu>\mu_c$）存在，相当于图7.49中的虚线，且夫洛开乘子为$\left.\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{\pm\sqrt{\varepsilon}}=1\pm2\sqrt{\varepsilon}$，所以$-\sqrt{\varepsilon}$是稳定的，$+\sqrt{\varepsilon}$是不稳定的。而只有当$\varepsilon<0$且$\varepsilon$数值很小时，映射和$y=x$之间出现窄缝，如图7.51。

除了间歇性类型Ⅰ通向湍流而外，还有其它两种通向湍流

的通路，即弗根堡姆道路和罗尔-托根斯道路。弗根堡姆道路典型例子是一维映射(7.15)，它是不断地通过图4.30(a)的叉型分岔而到达浑沌状态的。也就是当控制参数变化后，稳定的不动点通过超临界叉型分岔出现周期稳定轨道，而后又通过超临界叉型分岔出现原有周期加倍的周期稳定轨道，这样不断周期倍分岔，最终产生周期为2^∞的非周期吸引子。这种道路也可以通过亚临界分岔而到达浑沌，这叫类型Ⅲ的间歇性，它定性地类似于类型Ⅰ的间歇性，周期状态的长的相不断地被浑沌相所打断。类型Ⅲ的间歇性的特点是由于非线性的作用，周期倍分叉的振幅不断增加，当μ超过临界值，层流相就被打断。间歇类型Ⅲ的典型映射是

$$x_{n+1} = -(1+\varepsilon)x_n + \alpha x_n^2 + \beta' x_n^3 \qquad (7.165)$$

显然$\varepsilon=0$时，不动点$x_n=0$处夫洛开乘子 $\left.\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = -1$，

即图4.30(a)上标明的地方。对$\varepsilon\neq 0$，夫洛开乘子$\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = -(1+\varepsilon)$，故$\varepsilon>0$($\varepsilon<0$)不动点是不稳定（稳定）的。将映射(7.165)再迭代一次有

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -(1+\varepsilon)x_{n+1} + \alpha x_{n+1}^2 + \beta' x_{n+1}^3 \\ &= (1+2\varepsilon)x_n + \beta x_n^3 \quad (\varepsilon\text{很小}) \end{aligned} \qquad (7.166)$$

式中$\beta = -2(\beta' + \alpha^2)$

从(7.166)式看出，周期2解为

$$x_{1,2} = \left(-\frac{1+2\varepsilon}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{当}\varepsilon\to 0^+ \qquad (7.167)$$

当$\beta<0$时，(这代表超临界分岔的周期2稳定的解。当$\beta>$时，(7.166)式右端和$\varepsilon>0$一起加强这种不稳定性，即亚临界分岔，振幅增加。典型的时间序列如图7.53。

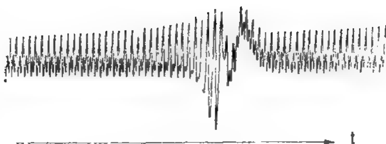


图 7.53 类型Ⅲ间歇性的时间序列

罗尔-托根斯道路是对朗道猜想的一种改善，朗道要求无穷次霍夫分岔才能达到湍流，而罗尔-托根斯认为只要两三次霍夫分岔就可以到达浑沌状态。当控制参数变化后，首先是定常状态失去稳定性，霍夫分岔使定常状态（不动点，零维）变成周期状态（极限环，维数为1频率f_1），第二次霍

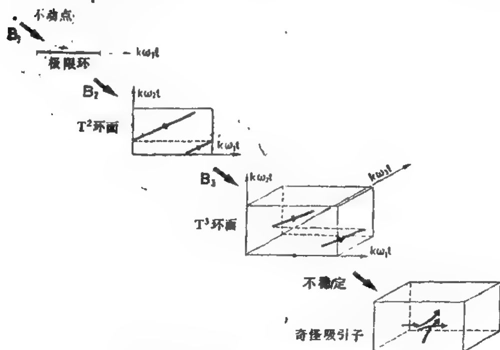


图 7.54 罗尔-托根斯通向湍流的道路

夫分岔，将极限环变成拟周期二维环面T_2（频率为f_1，f且f_1/f_2为无理数），这是二维环面上的拟周期吸引子。这时扰动加进去轨道只会变成同步，即f_1/f_2为有理数。第三次霍夫分岔就在三维环面T_3上有三个频率f_1，f_2和f_3构成拟周期吸引子。在T_2上的轨道（矩形上的线段）到T_3上（处在立方体内）它们可以既不平行又不相交，但是由于扰动增加的一个自由度（即第三个频率），使得新的元素进入系统而变成奇怪吸引子。罗尔-托根斯道路的过程见图7.54。以上一系列霍夫分岔都是超临界的。若是亚临界的霍夫分岔，则导致类型Ⅱ的间歇性。这种间歇性的整体形态同类型Ⅰ和Ⅲ，只是层流相期间发展的不稳定产生一个新频率，它和原来周期频率不同，而和图4.30(b)穿过分岔点的特征值$\alpha+i\beta$的比值α/β有关。

第八章　碎形和分数维

§1　问题的提出

Fractal（碎形）取自拉丁文Fractus，意思是不规则或破碎，它的创始人是美国IBM公司瓦特森（Watson)研究中心的蒙德布罗(Mandelbrot。Fractal是什么概念呢？用蒙德布罗的话来说：云不是球形的，山不是锥形的，海岸线不是平滑的。也就是说这些都是不规则或破碎的现象。象这类复杂现象在自然界是很多的，天空中的星星，地上的各种风景地形，灰尘微粒的凝聚集团，云中落下的雪花，流体中的湍流等等皆是。

这些现象都是自然界中实际存在的，有的形态是直接长出来的。例如树木、雪花都是从各自的"种子"生长成的，它们的形态非常复杂，很多也很美丽。图8.1是类似于闪电的锯齿状放电图案。图8.2是雪花的枝状形态。

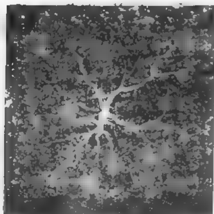


图　8.1　放电形态

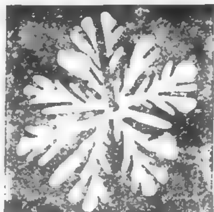


图　8.2　雪花形的聚集形态

这些形态杂乱延伸，但结构却十分精细。如果把它们放大，就显示出反复出现的细节，即类似的结构在所有尺度上都存在，这叫自相似结构。上一章介绍的浑沌实际上也属于这种类型的碎形，它们具有自相似的结构。

这些现象是比较难以认识的。拿中国的海岸线来说，假如有人问，中国的海岸线有多长，正确的答案并不是准确的数字（例如多少万公里），而是看情况而定。事实确是如此，如果以公里作测量单位，则海岸线上几米到几十米的一些弯曲就会被忽略。如果以米作单位，则测得的长度就会长得多。严格说对海岸线这样的碎形，提“多长”的想法就不对，而是应该问“海岸线如何曲折”或“如何复杂”？

这些现象虽然比较复杂，但它们有一个共同的特征——分数维，即它们的维数是分数。

§2 碎形的特征

以上这些现象都是发生在大自然中，它们又不断地受到外界的影响，并和环境不断进行物质和能量交换，因此可以认为是非平衡的自组织现象。它们的特点是没有统一的特征尺度，但却有自相似的结构（即存在标度律），它们处处都是间歇的和不均匀的。

还是拿海岸线来讲，小的弯曲的尺度可以小到米，大的弯曲的尺度可以大到几百公里，因而我们就不能说海岸线有一特征尺度（譬如说几百公里或几千公里），但却存在自相似的结构。无论拿比例为十万分之一地图还是拿百万分之一的地图来讲，中国的海岸线都是相同的形状。

怎么来描述它们呢？图8.3是一种海岸线形成的模型。

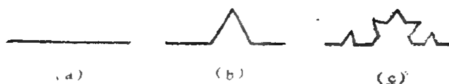


图 8.3 一种海岸线

(a) $L=1, \ r=\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$

(b) $L=\left(\frac{4}{3}\right)^{1}, \ r=\left(\frac{1}{3}\right)^{1}$

(c) $L=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}, \ r=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$

假如我们用一个长度为r的小尺子去量海岸线，量出的步数为$N(r)$，那么海岸线的总长度应该是

$$L = r \cdot N(r) \tag{8.1}$$

而且r越小，量出的L越大。图8.3中标出的是不同r时量出的海岸线长度。一般若

$$r = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \tag{8.2}$$

则海岸线长度

$$L = \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \tag{8.3}$$

设L和r的关系为

$$L = r^{x} \tag{8.4}$$

或

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]^{x} \tag{8.5}$$

从（8.5）式很易求得（8.4）式中的指数

$$\mu = 1 - \frac{\ln 4}{\ln 3} = -0.2618$$

$$= 1 - D \tag{8.6}$$

式中的

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \tag{8.7}$$

称为分数维。

显然，海岸线和图8.3最左边的规整的直线不同。后者不管用多么小的r，测得的长度都是1，即

$$L = r^0 \tag{8.8}$$

由（8.4）式和（8.6）式看出，这相当于

$$D = 1 \tag{8.9}$$

正好是直线的维数。但是对于图8.3的海岸线，由（8.6）式看出，

$$D = 1.2618 \tag{8.10}$$

故

$$L = r^{1-D} = \frac{1}{r^{0.2618}} \tag{8.11}$$

因而r愈小，测得的长度愈大。所以D是分数这个特征表征了象海岸线这样一类无特征长度问题的特征。我们把具有分数维D的形态叫碎形。

将（8.1）式和（8.11）式比较得出

$$N = r^{-D} \tag{8.12}$$

或

$$D = \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln N}{\ln l} \tag{8.13}$$

式中的$l = \frac{1}{r}$。对于（8.13）式中前一式的含义是：用r

为尺子的"小立方块"去量碎形的数目得到N。即把测量单位缩小原来的r倍，则量得的"小立方块"数目N就增加。而因为$l = \frac{1}{r}$，所以（8.13）式中后一式的含义是：把测量单位增加原来的l倍，则得到N个原来的对象。这两种定义同样表征了碎形的结构。图8.4表示用尺子为r的小立方块去覆盖一个点集对象的示意图。

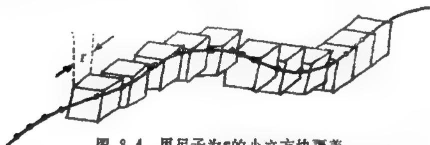


图 8.4 用尺子为r的小立方块覆盖点集对象的说明

（8.13）式中的$\ln N$量度了海岸线长度不确定性的信息。（8.13）式的定义也可以用于整数维的对象，例如对一个点（线、面、体），若用$r = \frac{1}{3}$的"小立方块"去量，分别得到$N = D(3，9，27)$ 即$N = r^{-D}$，$(r^{-1}，r^{-2}，r^{-3})$。这就说明点（线、面、体）的维数分别为0，1，2，3。

应该指出，r不能取得太小，若太小就不能判断出分数维结构，而只能得出是整数维。r也不能取得太大，若太大就只能得出对象是零维的物体。应该说（8.13）式所定义的过程是$r \to 0$的一种极限过程，但是对于实际存在的对象，总存在一个最小的特征长度ε，再比ε小时，该对象就不能看成是碎形了。

由（8.6）式看出

$$D=d-\mu \tag{8.14}$$

其中d是小线段元r的欧拉维数或拓扑维数。因为（8.6）式中μ是负数，所以$D>d$。同时海岸线弯弯曲曲，它并未占满二维空间，所以$D<d+1$。概括说，碎形的分数维D大于它的拓扑维而小于它要占据的空间维，即

$$d<D<d+1 \tag{8.15}$$

§3 各种典型碎形的分数维

从前面看出，象海岸线这样的碎形，是在规整图象上加上小的或更小的尺度上的不规则性而形成的，因此它们的维数就从拓扑维d上升到分数维D。从d维上看它似乎长度（面积、体积或点数）变成无穷大。下面列出一些典型的碎形及其维数D。

1.康托（Cantor）集合

它是由一直线（长度设为1）分成三段而去掉中间一段，然后在剩下的两段中仍按同样的办法处理下去而不断形成的点集，如图8.5。按公式（8.13），当$r=\frac{1}{3}$ $N=2$时它的分数维D为

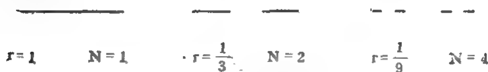


图 8.5 康托集合

$$D=0.6309 \tag{8.16}$$

康托集合最后由无数个点组成，显然它应比零维（一个点）

大，但因为点数虽多又未充满一个直线，中间还有很多空隙，所以维数应比一小。

2.各种海岸线

除了图8.3那种海岸线外，图8.6列出三种不同海岸线的典型单元。按（8.13）式它们的维数分别是

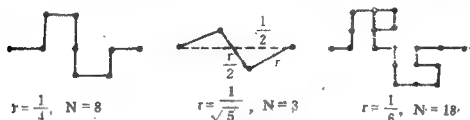


图 8.6 不同海岸线单元

$$D=\frac{\ln 8}{\ln 4}=1.5 \tag{8.17}$$

$$D=\frac{\ln 3}{\ln\sqrt{5}}=1.365 \tag{8.18}$$

$$D=\frac{\ln 18}{\ln 6}=1.613 \tag{8.19}$$

它们的形态当r很小时，长度趋向很大，因而维数应大于1，但又未能充满平面，所以维数又小于2。

3.谢尔宾斯基（SierPinski）垫片

它是由一个正三角形分成四块后挖去中间一块而不断形成的，如图8.7。

因此用$r=\frac{1}{2}$的小三角形去量它得到的数目$N=3$，故由（8.13）式得出

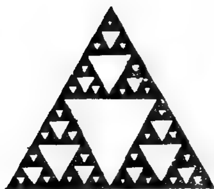


图 8.7 谢尔宾斯基垫片

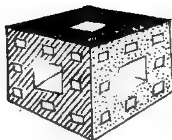


图 8.8 谢尔宾斯基海绵

$$D=\frac{\ln 3}{\ln 2}=1.5849 \qquad (8.20)$$

它的维数处在1和2之间是显然的，垫片几乎全是空的，线段看上去很长但又未充满整个平面。

4.谢尔宾斯基海绵

它是由一个规整的立方体通过打洞而构成，如图8.8。显然若用$r=\frac{1}{3}$为边的小立方块去量它，得出的小立方块数目为 8 ＋4＋ 8 ＝20，故按公式（8.13）有

$$D=\frac{\ln 20}{\ln 3}=2.7268 \qquad (8.21)$$

海绵全是洞，不占满三维空间，同时看上去面积是无穷大。因此D介于 2 和 3 之间是很自然的。

5.聚合体

它是由一个核心，而粒子一次一次加人其上而形成的，图8.1，8.2就是聚合体，它们并不是“怪物”，而是某一形态的反复出现（这就是自相似结构）。图 8.9 是一种聚合体，每个单元均由五个相同的亚单元所构成，而五个大单元又

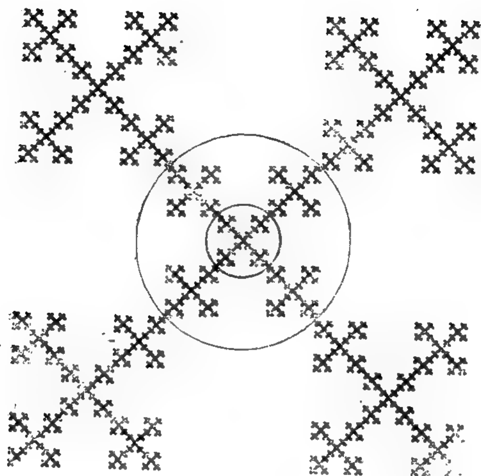


图 8.9 聚合体

可拼在一起构成更大的单元。

种子球形质点（它的直径是ε，就是前面所提及的最小的特征长度）在中央，每一次附着四个相同小球，这五个小球又可作为新的大球并吸附其它四个大球……。因此直径扩大3倍，小球的数目$N=2d+1=5$，故按（8.13）式后一个定义

$$D=\frac{\ln(2d+1)}{\ln 3}=\frac{\ln 5}{\ln 3}=1.46 \qquad (8.22)$$

上式中d是空间维数。

§4 自相似结构和标度律

碎形的共同特征是无特征尺度却有自相似的结构。关于自相似结构或标度律由(8.4)式可以得出为

$$L(\lambda r)=\lambda^{\nu}L(r)=\lambda^{d-D}L(r) \qquad (8.23)$$

(8.23)式表明，只要将尺度为r量出的海岸线（对象）长度$L(r)$放大λ^{ν}倍，就得到以尺度为λr的对象（海岸线长度）。其中$d-D$叫余维。

又如谢尔宾斯基垫片，以r为尺度时的质量$M(r)$和以$2r$为尺度时的质量$M(2r)$之间的关系为

$$M(2r)=3M(r)=2^{D}M(r) \qquad (8.24)$$

对密度ρ而言，从图8.7看出它服从

$$\rho(2r)=\frac{3}{4}\rho(r)=2^{D-d}\rho(r) \qquad (8.25)$$

(8.23)，(8.24)和(8.25)式是反应自相似结构的标度律，它们都是泛函方程，其解分别是

$$L=r^{d-D},\ M=r^{D},\ \rho=r^{D-d} \qquad (8.26)$$

从(8.26)式看出，我们要确定某个物理量q的分数维D，只要在双对数坐标纸上绘制该物理量q对特征长度r的关系，如果有一渐近区域（大r）形成直线，那么直线的斜率就是表征碎形的那个量的分数维，图8.10就是$\ln\rho$对$\ln r$曲线。

实际世界中遇到的碎形并不完全象海岸线那样是严格的自相似结构，在它们形成或增长过程中有某些随机性。例如布朗运动粒子若每步游动的步长为r，则N步以后粒子与原点间的距离$\overline{x_2}$为

$$\overline{x_2}=Nr^2$$

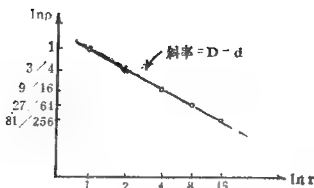


图 8.10 双对数坐标纸上求D

故
$$N \sim \frac{1}{r^2} \tag{8.27}$$

将（8.27）式与（8.12）式比较看出，$D=2$。这就是说布朗运动轨迹的维数$D=2$。

对于象胶体、气溶胶这样的聚合体，常常用有限扩散凝聚过程（简称DLA）来模拟其自相似结构。这种模型的初始状态是在二维点阵上放一个种子微粒，随后第二个微粒被放入点阵内作随机游动（扩散），直到它与种子微粒相碰并附着于种子微粒上与之结合成集团，如果它游动到点阵的边缘，则将其去除并释放另一微粒。依此类推，最后形成树枝状的凝聚集团，如图8.1。象图8.1的碎形具有无规分数维的自相似结构，其无规分数维常用类似于标度律（8.26）式的关系式


图 8.11 LDA方法模拟凝聚态

$$N=R^D,\quad M=L^D,$$

$$C = r^{D-d} \tag{8.28}$$

其中N是占据格点位置的格点数，R是回转半径（$R^2 = \frac{1}{2N}\sum_{i,j}(r_i - r_j)^2$，代表所有粒子间平方距离的平均），$M$是从中心（种子处）测量到$L$处的质量（即格点占据数），$C(r)$是距离$r$处的两点密度相关函数。

实际问题中还有一种在几个方向标度不同的自相似碎形，这种为自仿射分数维。图8.12是图8.11的聚合体在x和y方向有不同标度。为了使该图形与原图形相同，必须在x方向放大3倍，y方向放大5倍，即在x方向的分数维由(8.22)式得



图 8.12 二维自仿射碎形

$$D_1 = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.46$$

而在y方向的分数维

$$D_2 = \frac{\ln 5}{\ln 5} = 1$$

因此包含在r_1（x方向）和r_2（y方向）尺寸矩形内的质量为

$$M \sim Ar_1^{D_1} + Br_2^{D_2} \tag{8.29}$$

在$r_1 = r_2 = r$的方形内有

$$M \sim Ar^{D_1} + Br^{D_2} = Ar^{D_1}(1 + Cr^{-(D_1 - D_2)}), \tag{8.30}$$

正如前面看到的，分数维可以看作是碎形内空间质量重新分

配的定量描述，现在对自仿射碎形，包含在r内的质量重新分配，由最大的分数维D_1决定，而另一分数维代表对标度的修正。

最近方励之等人研究宇宙的大尺度结构。原来都认为自相关函数满足

$$C(r)=Ar^{-(3-D_2)} \tag{8.31}$$

结果发现$D_2=1.2$，这是一种自相似结构。后来很多问题不能解释，原来发现在更大范围内还有一个维数$D_1=2.4$。因此，认为宇宙不是自相似而是自仿射的。

§5 奇怪吸引子的维数

上一章我们已经提到奇怪吸引子中存在自相似的结构，从图7.7看出，周期倍分岔从分岔点R_1，R_2……直到μ_∞是一个典型的康托集合的构造，见图8.3。即一条直线上每次去除一部分而形成的，最后这条线上几乎有无穷多的点中间全是空隙的集合，所以μ_∞处的浑沌的维数一定处在0和1之

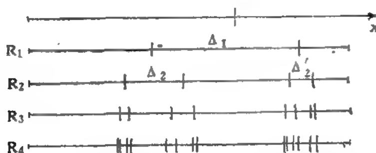


图 8.13 一维映射$f_n(x)=R_n\ x(1-x)$的自相似结构

间。

设我们用尺度为r的小尺子去覆盖它，量得的数目为

$N(r)$，那么我们用稍大的尺子$\frac{r}{e_j}$（其中e_j是一小数）去量K段对象，每段数目为N_j，则

$$N(r)=\sum_{j=1}^{K}N_j\left(\frac{r}{e_j}\right) \tag{8.32}$$

据分数维定义，$N(r)\sim r^{-D}$，$N\left(\frac{r}{e_j}\right)\sim\left(\frac{r}{e_j}\right)^{-D}$，故

$$r^{-D}=\left(\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1}{e_j}\right)^{-D}\right)\cdot r^{-D}$$

即

$$\sum_{j=1}^{K}e_j^D=1 \tag{8.33}$$

对于一维映射（7.15），从图7.17看出，粗略说，其浑沌结构每次是一分为二的，且由图7.18和图8.13看出

$$e_1=\frac{1}{\alpha},\qquad e_2=\frac{1}{\alpha^2}$$

故代入（8.33）式后有

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^D+\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^D=1 \tag{8.34}$$

即这是$\frac{1}{\alpha^D}$的二次方程式

$$\left(\frac{1}{\alpha^D}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha^D}\right)-1=0 \tag{8.35}$$

故解出

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^D=0.618 \tag{8.36}$$

由（8.36）式算出

$$D=0.524 \tag{8.37}$$

同样对于埃隆映射（7.90）或（7.91），由雅可比矩阵（7.95）看出它们的特征值为

$$\lambda_1=-1.924,\qquad \lambda_2=0.156 \qquad (8.38)$$

因此每一次迭代就相当于进行一次伸长和折迭。若一个半径为r的小圆，经过n次迭代后，则变成长轴为$r|\lambda_1|^n$，短轴为$r|\lambda_2|^n$的椭圆，见图8.14。因此若用边长为r的小方块去覆



图 8.14 二维映射将小圆变成椭圆

盖它得到的数目为$N(r)$，则用边长$|\lambda_2|^n r$的小方块去覆盖它得到的数目就是

$$N(|\lambda_2|^n r)=\frac{|\lambda_1|^n}{|\lambda_2|^n}N(r) \qquad (8.39)$$

再由分数维定义$N(r)\sim(\frac{1}{r})^D$，故

$$\left(\frac{1}{(\lambda_2)^n r}\right)^D=\frac{|\lambda_1|^n}{|\lambda_2|^n}\left(\frac{1}{r}\right)^D \qquad (8.40)$$

两边取对数求得

$$D=1-\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln|\lambda_2|}$$

$$=1-\frac{LE_1}{LE_2} \qquad (8.41)$$

将(8.38)式代入(8.41)式求得

$$D=1.35 \qquad (8.42)$$

埃隆吸引子的维数在 1 和 2 之间是显然的，因为最终的状态是一种长度为无穷大的集合。

对于连续流的劳伦兹奇怪吸引子，是未充满三维空间的有间隙的流。由李雅普诺夫特征指数定义(7.124)式和(7.128)式知，设想一个小的单位立方体，经过一个很小的时刻τ以后的伸长折迭，其体积变成

$$V(\tau)=1\cdot e^{(LE_1+LE_2+LE_3)\tau}$$

$$=e^{(LE_1+LE_3)\tau}\ (\text{因为}LE_2=0) \qquad (8.43)$$

又设每边边长缩小为$e^{(LE_3)\tau}=r$，因此用边长为r的小立方体去量$V(\tau)$，共得数目

$$N=\frac{e^{(LE_1+LE_3)\tau}}{[e^{(LE_3)\tau}]^3} \qquad (8.44)$$

又因为

$$\frac{1}{r}=e^{-(LE_3)\tau} \qquad (8.45)$$

故按分数维D定义(8.13)式得

$$D=\frac{\ln N}{\ln\frac{1}{r}}=\frac{(LE_1-2LE_3)\tau}{(-LE_3)\tau}$$

$$=2-\frac{LE_1}{LE_3}=2+\frac{LE_1}{|LE_3|} \qquad (8.46)$$

(8.46)式说明，劳伦兹吸引子的维数处在 2 和 3 之间。当劳伦兹方程(7.65)中参数值取为$\sigma=10$，$r=45.92$，$b=4.0$时，按(8.46)式算出$D=2.07$。

既然正的李雅普诺夫特征指数和分数维同样是浑沌的特性，它们一定有象三维空间时(8.46)式相类似的关系，卡普隆(KaPlan)和约克(Yorke)猜想，任何奇怪吸引子有如下的关系

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} LE_i}{|LE_{j+1}|} \tag{8.47}$$

其中j是使$\sum_{i=1}^{j} LE_i \geqslant 0$的最大整数.即使

$$\sum_{i=1}^{j} LE_i \geqslant 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{j+1} LE_i < 0 \tag{8.48}$$

显然对图7.30的四种吸引子，它们的维数分别为

$$D = 0,\ D = 1,\ D = 2,\ 2 < D < 3 \tag{8.49}$$

§6 不均匀分布的自相似结构

到现在为止，我们用分数维D描述了个别对象的自相似结构。有时我们讨论的问题不是指个别对象而是指某种分布，例如某个物理量的涨落ξ是一个随机变量，且ξ大于某一个量L的概率分布服从

$$P_r(\xi > L) \propto L^{-\alpha} \tag{8.50}$$

其中α叫双曲指数。而且在d维空间中这种分布具有概率意义上的自相似性，即

$$L(rx) = r^H L(x) \tag{8.51}$$

其中H叫标度指数，一般

$$0 < H < 1 \tag{8.52}$$

例如图8.15代表不同层次高度差$\Delta z = 50,\ 100,\ 200,\ 400,\ 800,\ 1600,\ 3200$米上测得的风速分布。图中$L$是指定的风速涨落方差$\overline{\Delta v^2}$。从图看出，概率分布形式是一样的，但是分布的特征（例如方差）等就不同，即没有统一的方差，但却有自相似的结构，图中的L代表$\overline{\Delta v^2}$，因而有

$$\overline{\Delta v^2}(2\Delta z) = 2^H \overline{\Delta v2}(\Delta z) \tag{8.53}$$

图中两线之间的水平距离很易验证就是

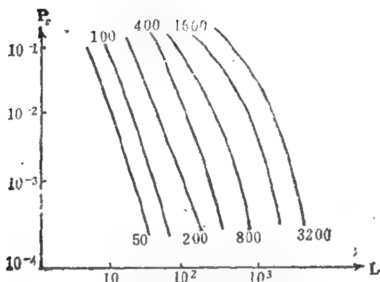


图 8.15 不同高度层次间的风速分布

$$\Delta = H\ln 2 \tag{8.54}$$

具有（8.51）式所示的自相似分布是很多的，例如$d=1$维的布朗运动随机分布速度方差和时间t的关系为

$$\overline{\Delta v^2(t)} \propto t^{2H} \tag{8.55}$$

若$H=\frac{1}{2}$就是高斯噪声。具有分布(8.55)的自相似律为

$$\overline{\Delta v^2(rt)} = r^{2H}\,\overline{\Delta v^2(t)} \tag{8.56}$$

又如在$d=2$维的地形表面，添加不同尺度的高度$h(x, y)$成为碎形地形，其高度方差$\overline{\Delta h^2(x, y)}$是距离$(x^2+y^2)$的函数，即

$$\overline{\Delta h^2(x, z)} \propto (x^2+y^2)^H \tag{8.57}$$

因而这种分布的自相似律为

$$\overline{\Delta h^2(r|x|)} = r^{2H}\,\overline{\Delta h^2(|x|)} \tag{8.58}$$

其中$|x|$代表模$\sqrt{x^2+y^2}$。

正象(8.4)式中的μ反映了个别对象的碎形性质一样，(8.51)式中的H反映了随机分布的对象的碎形性质。

由(8.14)式看出，碎形是在d维上添加了小的不规则性而把维数提高到D，同样对于随机分布碎形维数应由d提高到D

$$D = d + 1 - H \tag{8.59}$$

因此$d = 1$，$H = \frac{1}{2}$的布朗运动的分布维数$D = 1.5$。

又例如对大气风速，从水平方向测得图8.15中的$H_{水平} = 1/3$，从垂直方向测得$H_{垂直} = 3/5$。这就说明水平和垂直方向标度不同，是一个自仿射的碎形。那么整体上的标度为

$$r^1 \cdot r^1 \cdot r^{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)} = r^{2.56} \tag{8.60}$$

所以有人认为大气运动的维数$D = 2.56$。

§7 从一个变量的时间序列计算分数维

前面我们了解到维数是反映复杂对象的结构。实际问题中我们往往只能得到一个变量的时间序列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \cdots\cdots \tag{8.61}$$

该序列的时间间隔为Δt，耗散系统吸引子的结构（或分数维）就反映在该时间序列中。为此我们要从(8.61)式中重建一个m维相空间，它们的每个分量是从(8.61)式中挑出来的。其时间间隔是τ，它是Δt的整数倍。例如取$\tau = 1 \cdot \Delta t$而构成的三维相空间为

$$\begin{cases} x_1(x_0,\ x_1,\ x_2) \\ x_2(x_1,\ x_2,\ x_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{8.62}$$

至于τ的选择是使其构成的m维相空间的每一个分量是相互独立的。这样由(8.62)式的向量x_1，x_2……在m维空间中就形成动力系统的轨道，见图8.16。

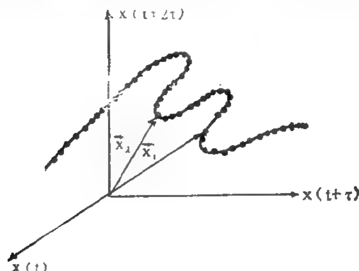


图 8.16 m维嵌入相空间的轨道

根据韦特莱(Whitney)嵌入定理，这个嵌入的相空间维数m必须很大，它和实际的D维吸引子之间要满足

$$m = 2D + 1 \tag{8.63}$$

为了计算维数，我们随便给一个数r，然后检查一遍有多少"点对"(x_i, x_j)之间的距离小于r，把距离小于r的"点对"在一切"点对"（若有N个点，则共有N^2个"点对"）中所占的比例

$$c(r) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \theta(r - |x_i - x_j|) \tag{8.64}$$

记作$c(r)$，其中$\theta(x)$是亥维赛(Heaviside)函数，它定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & 当 x > 0 \\ 0, & 当 x < 0 \end{cases} \tag{8.65}$$

若r选得太大，当然一切"点对"的距离都不会超过它，

因此$c(r)=1$，$\ln c(r)=0$。从而$c(r)$描述了随r增加时，"点对"数如何增长的分布函数。显然太大的r反映不了系统的内部性质。

适当缩小r，可能在r的一段区间内，$c(r)$随r的变化为

$$c(r)=r^{D} \qquad (8.66)$$

这里D就是该吸引子的维数。例如均匀分布在一条线上的资料点，则$c(r)$和r的一次方成正比，即$D=1$；而均匀分布在一个面上的资料点，则$c(r)$应和r的二次方成正比，故$D=2$，见图8.17。因此D具有描述该吸引子结构的特征。如果r选得太小，实验中一切偶然的噪声都会表现出来，由于噪声在任何一维上都起作用，m维空间中就会测得$D=m$。因此只要定一个m值，在$\ln c(r)$对于$\ln r$的图上，若有一段是直线，则该线的斜率就是D。见图8.18。

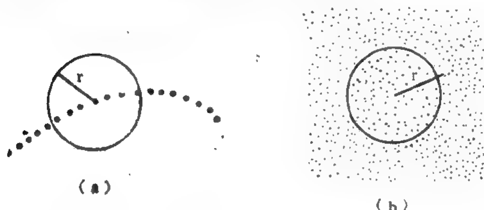


图 8.17 维数的计算说明
(a) $c(r)\sim r^{1}$ (b) $c(r)\sim r^{2}$

图8.29绘出了D和m的关系，当m增加后，其斜率D也增加，最后到$m=5$时，D达到饱和值2.8，这时D就反映了吸引子的结构，而$m=5$是描述该浑沌吸引子的最小的状态（相）

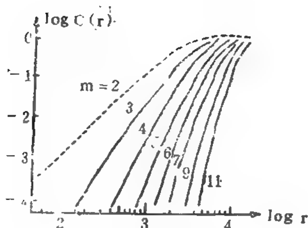


图 8.18 在双对数坐标纸上求D

空间变数的个数。

时间序列可以确定分数维，即浑沌吸引子某一个时刻的信息。同时我们还可以用时间序列确定信息流率——哥尔莫戈洛夫熵，即(7.135)式中的K。

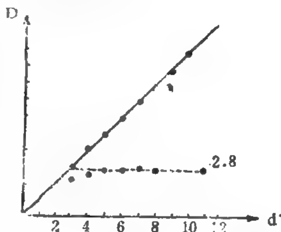


图 8.19 D是嵌入空间维数m的函数
对于白噪声，D是m的线性函数；
对于浑沌，D可达到饱和

在重建的m维相空间中，即时间长度为$(m-1)\tau$的两条相距小于r的辐散轨迹，下一步时间τ及以后它们保持在r内的机会随$e^{LE \cdot m\tau}$成比例下降。而保持在r球内机会的平均"点对"数正比于

$$c_m \sim e^{-m\tau(LE_1+LE_2+\cdots\cdots)} = e^{-m\tau \cdot K} \qquad (8.67)$$

式中仅仅辐散轴($LE_i>0$)有贡献，K就是哥尔莫戈洛夫熵。

若固定r,维数由m增加到$m+k$，即轨迹由$(m-1)\tau$延长到$(m+k-1)\tau$，则类似(8.67)式，有

$$C_{m+k}(r) \sim e^{-(m+K)\cdot K} \tag{8.68}$$

(8.67)式和(8.68)式相除得

$$K = \frac{1}{k\tau} \ln \frac{C_m(r)}{C_{m+k}(r)} \tag{8.69}$$

这就是K熵，$\frac{1}{K}$表示可预测性的平均时间尺度。

第九章　细胞自动机

§1　复杂系统的特征

前面各章中我们已经研究了复杂现象转化的一些基本概念和方法，但是用它们去解决实际问题还有一定的困难。因此我们能抓住复杂系统的特征去模拟实际的复杂现象就有重要的意义。下面我们把复杂系统归纳为如下几个特征：

1.复杂系统有许多基本单元(或细胞)组成。例如人脑有 10^{11} 到 10^{12} 个神经元组成，世界上有 5×10^{9} 人口，激光有 10^{18} 个原子，流体在标准状况下每立方厘米含有 10^{23} 个分子，全国运动会的大型团体操表演有几千人参加。应该说明，每个相互作用的单元形成不同的层次，我们只能用属于那个层次的变数或参数来描述其状态空间。高一层次的相互作用的变数是低层次动力学的“集中性质”（统计矩和卷积）。因此当我们谈论较高层次时，通常要将自由度大量削减，较高层次从低层次得到选择的信息，并反过来对低层次动力学进行反馈控制。

2.每个基本单元(或细胞)的状态只有极少数几种。例如雪花中的每个单元不是冰就是汽，围棋盘上的每个格点不是黑子就是白子，大型团体操中的每个人穿的衣服只是几种颜色中的一种，每个人的动作也只是导演规定的几种之一(例如不是站起来就是蹲下去)。这里所讲的细胞，并不一定就是指生物学中的细胞，最通常是指组成系统的基本单元，这里单

元的状态种类可以指生和死，真和假，好和坏，大和小，站和蹲，冰和汽，左旋和右旋，白和黑等等。

3.每个细胞(或单元)的状态随时间的演变只随其邻居的细胞状态决定。例如围棋中白子的四个邻居若是黑子，则白子就要被吃掉；大型团体操中的每个人只认识周围几个人，导演规定他（她）们的动作变化只和周围几个邻居动作有联系，雪花中的水汽是否冻结变成冰，主要由该水汽的几个邻居状况（冰或汽）决定。

根据这三个特征，通过各细胞的局部相互作用，整体上可以显示出多种多样的复杂形态。例如复杂的雪花有各种各样形式，大型团体操可以有多种造形，围棋可以形成多样棋局。

§2 细胞自动机

复杂系统有如上几个特征，细胞自动机就是根据这些特征而设计出来的一种在计算机上模拟各种复杂现象的方法。

首先，为了能容纳数量相当大的单元，我们将空间分成若干格点，若是一维问题，可以在一条线上分成好多相等的等分，每个等分就可以代表一个细胞单元；若是二维(或三维)问题则将空间分成若干网格。例如围棋盘上有18×18个格子共19×19个格子点，每个点上可以放白的或黑的棋子，大型团体操在足球场上划分出好多格子。每个人占据一个格子。当然格子可以是正方形的，可以是三角形的，也可以是六角形的。

第二，每个细胞的状态仅有K种，并用文字a_i(一维)，$a_{i,j}$（二维），$a_{i,j,k}$(三维)表示，在数学上为了区分k种不不同的状态，这里文字a可以用离散的数字0，1，2，3，…

…等k个数字表示。细胞的状态只取其中的一个数字。例如雪花中的冰细胞用1表示，汽细胞用0表示，围棋中的黑子和白子分别用1和0表示。

第三，根据物理考虑，制订格点上的细胞是如何演化的规则。前面已经提到，该细胞如何演化是和几个邻居有关。例如一维细胞自动机某i位置上的状态在t时刻设为$a_i^{(t)}$，那么它仅和左右两个邻居有关，则制订的某一规则为

$$a_i^{(t)} = (a_{i-1}^{(t-1)} + a_{i+1}^{(t-1)}) \qquad (9.1)$$

上式说明，若左右两个邻居在$t-1$时刻的状态相同，例如$a_{i-1}^{(t-1)}=1$，$a_{i+1}^{(t-1)}=1$或$a_{i-1}^{(t-1)}=0$，$a_{i+1}^{(t-1)}=0$，则该细胞下一时刻的状态就为用数字$a_i^{(t)}=0$代表的状态。若左右两个邻居的状态不同，例$a_{i-1}^{(t-1)}=0$，$a_{i+1}^{(t-1)}=1$，则该细胞的状态就为用$a_i^{(t)}=1$数值代表的状态。应该注意（9.1）式右端mod2，代表二进制的加法，即

$$0+0=0,\ 1+1=0,\ 0+1=1 \qquad (9.2)$$

一般制订规则和n个邻居有关，可以表为

$$a_i^t = f(a_{i-\frac{n}{2}}^{(t-1)} \cdots a_{i-1}^{(t-1)}\ a_i^{(t-1)}\ a_{i+1}^{(t-1)} \cdots a_{i+\frac{n}{2}}^{(t-1)}) \qquad (9.3)$$

对二维或三维细胞自动机有类似的表达式。

应该注意到，如果细胞的状态有K种，有n个邻居，那么这种规则共有K^{k^n}种.这是非常大的数字。例如若细胞只有两种状态（例如0和1），$K=2$且有四个邻居（$n=4$），那么细胞状态演化的规则多达65536种。若$K=2$，$n=8$则有10^{77}种规则。

归纳说，细胞自动机中空间是离散的，时间也是离散的，系统的状态也是离散的，即是布尔（Boolean）化的。细胞自动机实际上是一种布尔化的离散的动力系统。

§3 探索系统复杂性的简单数学模型

既然细胞自动机抓住了复杂系统的特征，因此它是描述复杂的自组织现象的简单模型。我们先以一维细胞自动机为例，说明它不仅可以模拟耗散系统中的四种吸引子，而且还能描述更为复杂的形态。

我们在一直线上划分若干格点，每个格点上的细胞不是0（白色）就是1（黑色）。下面我们采用不同的规则可以导得四种不同的形态。

规则1：细胞演化由前一时刻左右两个邻居细胞状态决定，规则为

$$0+0=0,\ 1+1=1,\ 0+1=0 \tag{9.4}$$

则状态一步步演化如图9.1。

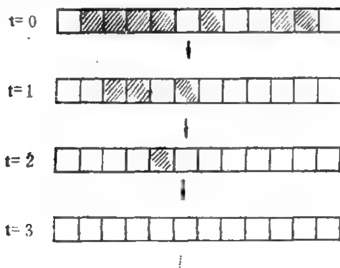


图 9.1 均匀稳定的整体状态

从图上看出，每个格点局部都按规则（9.4）演化，初始时刻$t=0$不规则的整体状态，经过三步时间演化以后，整

体上变成均匀稳定的状态，且随时间不变化。这就是耗散系统中长时间的一种归宿——定常吸引子。

规则2：细胞状态由左右邻居及自身决定，规则为若左右两个邻居状态为0，而自身状态为1，则下一时刻自身就为1，其它情况下自身都为0，即

$$010\Rightarrow 1，\text{其它}\Rightarrow 0 \qquad (9.5)$$

其演化示意如图9.2

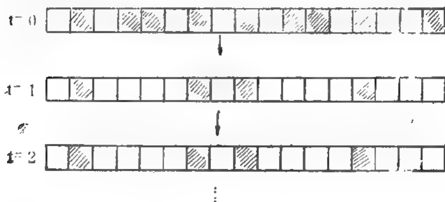


图 9.2 周期的整体状态

从图9.2看出，$t=1$步以后整体上保持四个格点上是1（黑），而其它格点上是0（白）。这就相当于耗散系统中的另一吸引子——周期吸引子。图9.2中是$t=1$以后每步都相同，即周期1，若是隔一步相同，则是周期2。

规则3：和规则1相同的是由左右两个邻居决定，但规则为

$$0+0=0，\ 0+1=1，\ 1+1=0 \qquad (9.6)$$

此时状态连续演化图为图9.3。

从图9.3看出，$t=4$步起左右两边出现了和$t=0$到$t=3$步相似的结构，这种相似结构还会扩散下去。这就是耗散系统中的浑

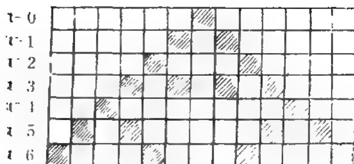


图9.3 自相似的浑沌状态

沌吸引子结构。若把图9.3整个看成是空间分布，大家看起来像著名的谢尔宾斯基海绵。

规则4：设状态由四个邻居（左右各两个）加上自身共五个格点决定，规则为若五个数中有

$$二个1\Rightarrow1，四个1\Rightarrow1，其它为0 \qquad (9.7)$$

其连续演化图为图9.4。从图9.4看出，这种规则演化下去，绝大多数初始状态长成葡萄串似的形状，最后“死掉”，象图9.4左边在$t=9$步死掉，右边在$t=18$步死掉。对于某些初始状态则系统一直“活”下去，有的还以一定的波速传播。这种状态是过去耗散系统中未发现过，所以称为复杂结构。有人认为这可能是周期型向浑沌型的转捩。

以上四种由一维细胞自动机产生出的四种形态只是大量例子中的几个典型。由于规则变化很多，产生的形态会多种多样，所以说细胞自动机是产生复杂现象的简单模型。这四种状态当初始条件稍有变化（例如只变化$t=0$的一个细胞），其最后状态有何影响呢？第一类无影响，第二类只影响局部，

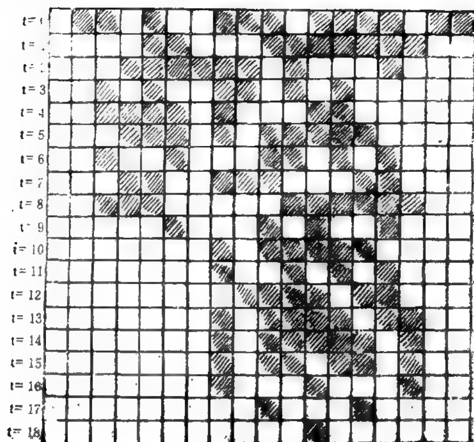


图9.4 复杂结构

第三类极其敏感初条件，但仍为浑沌状态，第四类比第三类还要敏感初条件。

§4 二维细胞自动机

对于晶体生长，生命现象，凝聚态，易用二维细胞自动机讨论。

下面我们在一正方形的19×19的格点中央，放五个黑子，它们代表一种生物学中的某个组织图案，这个图案我们规定按如下规则演化：在每个格点上如果它的左右上下四个邻居

有单数个黑子，那么下时刻该落点上放黑子，若是双数个黑子，则下时刻该格点上就空着。图9.5是演化的结果。从图9.5看出，$t=2$的图象实际上是$t=0$图案繁殖成为四个，到$t=4$就更清楚了，只是相互之间距离拉开了。但是由于边界环境的限制，边界上不准放子，那么到$t=8$时，图案a，b，c，d的样子比起它们的祖先（$f=0$）来就有了变异（图中空心圈的点应拿走），而且c的变异最大。到$t=12$时变异后的a又繁殖成四个e，f，g，h，它们都是a的复制品，这是生物学中自我复制的基本概念。

同样，雪花的图象也可以用二维细胞自动机模拟出来，所不同的是不用正方形网格，而用六角形网格。每个格点上放一个细胞，它们不是冰就是过冷水汽。为了方便，冰用数字1（黑点）表示，水汽用数字0（白点）表示。初始状态是网格中心只有一个冰核细胞，它是冻结核，是雪花生长的“种子”，其它格子点上均是水汽。细胞演化的规则定为：若周围六个细胞的数值和为奇数（即二进制的1），则下一时刻该细胞取为冰相，若数值和为偶数(即二进制的0)，则下一时刻该细胞取为汽相。这种“奇偶”规则反应了雪花形成过程中的物理机制。奇数（例如1），表示该细胞周围只有一个冰细胞，那么温度降到一定程度，细胞冻结释放潜热就可以迅速通过环境扩散出去。若为偶数（例如2，4，6），则表示该细胞周围冰细胞多，因而该细胞不易冻结，因为潜热释放不出去。图9.6就是按“奇偶”规则演化的前四步。若干步以后，一个漂亮的雪花图象形成了，见图9.7。

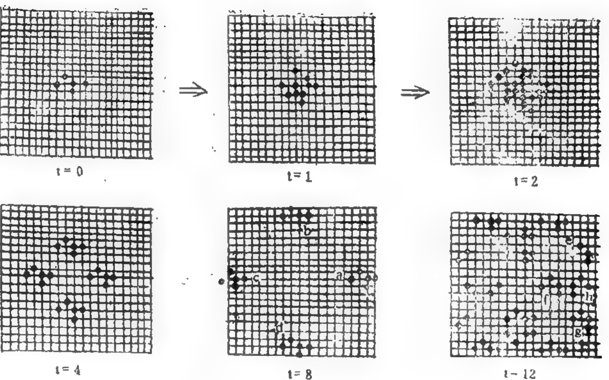


图9.5 生命系统的遗传及变异

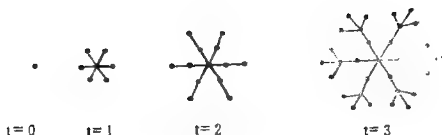


图9.6 雪花形成的前四步



图 9.7 细胞自动机模拟的雪花

§5 细胞自动机的应用

过去我们求解物理问题，习惯于用微分方程，找其量的变化关系，但是象雪花、生命系统用微分方程来描述是极其困难的。这里用细胞自动机可以较为简单地确定其定性性能。例如化学反应中，如果不断地加入反应物且有产生物不断输出，那么在第一章我们已经看到，化学浓度不仅有时间变化，而且还有空间变化，会出现图案象螺旋卷的反应波。如果我们采用三维细胞自动机网格(例如20 × 20 × 20)作容器，浓度分0，1，2，3档，采用适当的反应规则，细胞自动机就能把反应波的动态在计算机屏幕上显示出来。

现在还创造了一种格子气模型，用细胞自动机去解决流体力学纳维-斯托克司方程难以求解的问题。过去我们习惯于把流体看成是连续介质，因而空间中的每一点设想有一个平均密度、压力、温度、速度等。细胞自动机则考虑流体的流动是由粒子相互碰撞（局部）而在整体上表现出的复杂流形。正象大型团体操我们看到的是整体上的造型变化，实际

上它们是由每个局部的相互作用而形成的。

我们设想在三角形网格中(图9.8),其格子长度为1,每个格子点上最多有六个粒子,质量相同,速度大小为一个单位,指向六个连接方向之一,并用数字0,1,2,3,4,5表示,不准有完全相同的两个粒子同时占据一个格点。首先每个粒子按它的速度指向移动一格走到最邻近的格点,然后如果正好有两个粒子以相反方向对准同一格点运动,则发生碰撞,于是按规则规定改变方向(例如逆时针方向转60°)。用细胞自动机运算足够长的时间后作空间(取许多相邻格点)和时间(取许多相继时刻)的统计平均,就可得到宏观上的流动形式。图9.9就是用细胞自动机模拟绕圆柱的流体运动的

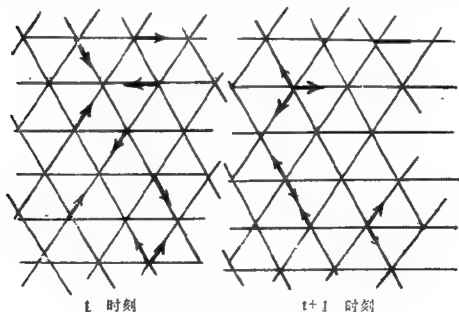


图9.8 格子气细胞碰撞规则

结果,圆柱后面的涡旋动形式明显可见。

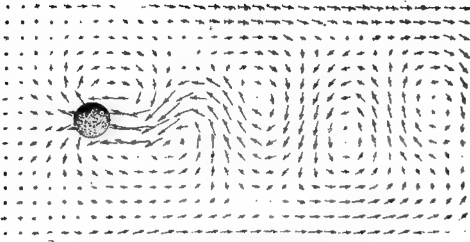


图 9.9 用格子气模拟圆柱后面的流动

细胞自动机由于运算规则对每个格点都一样，而且只涉及邻近的几个点，所以是大规模并行计算机的思路，这比目前使用的串行计算机更接近于人脑。由于是并行计算，某一小部份坏了并不影响整体结果，正象大型团体操，有一人未按导演规定动作做，整体上仍是一幅和谐的图象。

从细胞自动机可以产生浑沌型结构状态看出，细胞自动机可以作为一种随机数发生器。虽然规则是确定的，但时间足够长以后，每一步的整体空间状态及每个格点上的状态都可以不同，就象随机的一样。或者象图9.5一样，若 $t=0$ 少放一个黑子，那么长时间以后的状态就是无法预测的了。很多物理系统并无固有的随机源，而随机性主要是通过确定性的大量的分子碰撞的结果。这也许是湍流的原因。

相反，若在细胞自动机中加进随机成分，例如每个格点上的值以一定的概率变化，那么象渗透过程一样，每个格点上按一定的概率以两种可能的规则演化，因此状态就有可能产生不连续的变化，这就是相变。

自然界是复杂的，并不是每个吸引子以及它们的吸引盆都分得一清二楚，而是有许许多多吸引子，且每个吸引子的吸引盆又盘根错节，相互渗透。细胞自动机说明，复杂现象的最好描述就是其本身，所以要通过细胞自动机对复杂性作模拟及概括性研究，那么它的应用是很大的。

§6 细胞自动机的特色

归纳说，细胞自动机的特色是空间、时间以及函数值（状态）都是离散的，所有细胞以规则方式排列(即均匀的)并以一定局部规则演化（即同步的），整体上显示复杂的形态。这里也体现了局部和整体的关系。每个局部的家庭或工厂以一定的方式活动，整个社会显示出复杂的形式。

这里规则上体现出非线性的相互作用．从布尔代数规则(9.2)式就可以看出，0＋0可以是0，而1＋1也可以是0而不是2，这往往是自然界组合的方式。这里也把确定性和随机性结合起来，确定的规则可以产生随机的结果，若加进随机成分反而易得到确定的结果。

下面我们列出一些系统，以和细胞自动机相区别：

偏微分方程：时间、空间、函数值连续。

有限差分方程：函数值连续。

动力自旋（Dynamic spin)系统：规则是概率的，演化是非同步的。

渗透系统： 规则本质上是概率的。

马尔科夫（Markov）随机场：质点的位置和速度是连续的。

迭代映射： 非局部的运算。

但以上系统和细胞自动机也有联系，现在用细胞自动机可以解偏微分方程（如泊松方程，扩散方程，伯格（Burger）方程等）。又如若把映射用于空间的格子点上，则可以用来研究非平衡相变和湍流的间歇性等。

第十章　复杂现象研究综述

§1　复杂系统的研究方法

前九章我们归纳了研究非线性复杂现象的一些概念和方法，这都是近20年的研究成果，本节把目前研究复杂系统的方法综合如下。

1.黑箱方法

这种方法把复杂系统仅仅考虑为对某个输入的响应，这种响应就是输出。例如冰期和间冰期10万年周期的变化可以看成是对轨道参数作为输入的一种响应。若以式子表示，输出o是输入i的函数，即

$$o = f\ (i) \tag{10.1}$$

实际上这种关系常常以表的形式出现，见图10.1。

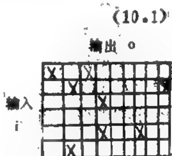


图 10.1　黑箱方法

该方法有如下几种困难：

(a)有许多种的输入和输出，因而要找出一般的规律是困难的。

(b) 甚至一个输入可以引起不同的输出，这就必然要导致假设黑箱的内部状态是重要的。

(c) 在重要的情况下，没有任何输入而显示出输出。例如人脑的反省过程看来就没有任何输入，这使得(10.1)式毫无意义。

2.还原方法

这种方法将复杂系统分解为它们的单元，例如：

$$
\begin{array}{l}
\text{气体} \xrightarrow{\text{分解}} \text{分子} \\
\text{晶体} \longrightarrow \text{原子} \\
\text{人脑} \longrightarrow \text{神经元} \\
\text{组织} \longrightarrow \text{细胞}
\end{array}
\qquad (10.2)
$$

下一步就是分析单元的性质，我们希望借助于单元的性质来了解整个系统的性质。这个方法在许多情况下是相当成功的，但是，基本困难是宏观层次上的性质不同于单元的性质。例如物理中的气体在宏观层次上有压力和温度的性质，但在微观层次上我们只能描述原子的速度和位置，却没有压力、温度这些概念。

另外在许多系统中各个部份之间的协作作用对宏观形态是重要的，比起单元的性质要重要得多。

3.统计方法

最典型例子是气体，我们不能记录个别原子的位置和速度，但是我们可以考虑速度的概率分布$P(v)$，在统计力学上$P(v)$可以导出，那么整个气体的性质可以通过合适的平均求得。例如平均动能为

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \int P(v)\frac{m}{2}v^2dv \qquad (10.3)$$

m是一个气体原子质量，在宏观层次上我们观测到的是温度，故

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{1}{2}kT \qquad (10.4)$$

其中k是波耳兹曼常数，T是绝对温度。这样就把微观量v与宏观量T连接了起来。若仍然不知道某个微观状态i的概

率分布P_i，那么信息熵为

$$S = -\sum_i P_i \ln P_i \tag{10.5}$$

可以用最大熵原理来决定P_i

4.协同学方法

该方法认为微观元素通过自组织形成宏观状态而没有特定的外部影响。贝纳对流状态并不是外界强加的结果，而仅仅是间接的触发。根据奴役原理，一旦宏观的序参量给出，那么微观单元的形态就确定了。见图10.2。

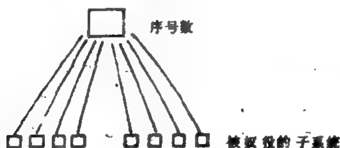


图 10.2　奴役原理示意图

该方法将大量自由度消去。用序参量控制的方程，当外界控制参数变化时可以经历很多不同形态。

5.信息论方法

该方法认为复杂系统进行的过程都是系统的各个部份（子系统）信息交换的结果。信息定义为

$$I = -K\sum P_j \ln P_j \tag{10.6}$$

其中K是常数，P_j是出现用指标j指示的符号的相对频率，它可以相当好地解释为状态j的概率。第六章我们已经看到，信息也是浑沌的量度。

6.演化方法

按照达尔文进化论，从低级的复杂性向高级的复杂性的演化的机制要进行三个步骤：

变异，繁殖，选择，

如何通过竞争而选择？繁殖和复制有何关系？细胞自动机模拟的规则揭示出这些问题的一些线索。

7.模拟方法

可以说细胞自动机是模拟复杂现象的简单模型。另外我们论述过用时间序列重新构造一个吸引子并计算其李雅普诺夫特征指数及维数，这也是一种模拟。

§2 地球系统尺度的多样性

地球系统包括大气、海洋、地壳、地幔、生物等子系统，它们之间通过能量和动量交换，通过生物化学循环进行相互作用而出现范围很宽的各种时间尺度的运动形式。

百万年的时间尺度，包括地幔运动，板块运动，造山运动和火山活动，生命的演化以及相伴的大气化学成份的变化等；千年的时间尺度，包括冰期和间冰期之间的振荡以及相伴的生物种群分布的变化，地球轨道的变化等；十年到百年的时间尺度，包括气候变化，大气的化学成份(如CO_2)，地表枯干的形式等；天到季的时间尺度，包括天气变化，海洋环流涡旋，极地冰冠的增长或溶化，地表径流量，植物生长的年循环，各种辐射过程等；秒到小时的时间尺度，包括地表的质量、动量和能量通量，积云对流等。

由于地球系统有各种各样的时间尺度，所以在研究复杂形态时，必须考虑各个子系统之间的相互作用，例如大气海洋之间的热交换，土壤和植物之间的营养交换等。同时还必须模拟所考虑的某时间尺度与另一个时间尺度之间的相互作用。显然我们不能跨越整个时间尺度来研究，而应该考虑尺度的层次或等级，把相对于我们所研究尺度的比较慢的演化

过程可以看成是固定的，而把比较快的演化过程消去或用统计或参数化方法处理。图10.3表明地球系统中一个流动模式的各个元素。

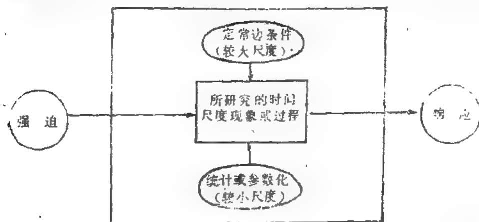


图 10.3 地球系统中一个流动模式的元素

例如对于24小时尺度的天气预报，我们可以把外界的能量通量看成是常数，但对于在10天间隔内的预测我们必须包括演化的边界热交换，而对于气候模式，我们则必须考虑太阳热量纬向分布的轨道变化。

由于流体流动的非线性性质，响应于驱动它们的变化强度可以显示出不同的形态，在许多情况下，从一个形态变到另一个形态只需要控制参数产生无穷小的变化。

如果把大气运动能量主要集中在地球半径的尺度，而耗散尺度是毫米量级，那么大气运动最大和最小的尺度之比为10^{10}。这正是研究大气运动的困难所在，也是大气运动多样性的原因。

§3 大气湍流的一个模型

下面介绍我们研究的一个湍流模型，说明分岔和混沌在大气中的应用，并由此说明研究复杂现象是有希望的。

伯格在1948年曾提出一个湍流模型，巢纪平在1962年其推广到大气中去解释小尺度对流和环境的相互作用。但由于当时并不知道分岔分析和浑沌，所以他们并未用来解释湍流现象。我们首先用分岔分析方法找到了湍流发生的条件，并解释了重力内波和湍流的相互作用。

该模型的基本方程组为

$$\begin{cases} H\dfrac{dU}{dt}=P-\dfrac{\nu U}{H}-\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_0^H W^2dz \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{U}{H}w+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}-w\dfrac{\partial w}{\partial z}+\beta\theta \\ H\dfrac{dT}{dt}=Q-\dfrac{\nu T}{H}-\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_0^H w\theta dz \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\left(\dfrac{T}{H}-\nu_s\right)w+\nu\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-w\dfrac{\partial\theta}{\partial z} \end{cases} \tag{10.7}$$

其中$U(t)$，$T(t)$表示对高度平均过的水平速度和温度，$w(z,t)$，$\theta(z,t)$为扰动垂直速度和温度。P和Q是用于维持初始平均运动U_0和平均温度T_0所需的气压梯度力和热量，带ν的项代表粘性耗散，第四个方程实际上应该用热传导系数κ而不是ν，H是扰动的垂直厚度。方程组（10.7）表明，它是一个非线性耗散动力系统，而且反应了基本场U，T和扰动场w，θ的相互作用。（10.7）式的第一和第三式说明，扰动的动量输送$\frac{1}{H}\int_0^H w^2dz$和热量输送$\frac{1}{H}\int_0^H w\theta dz$可以改变基本场。反过来，基本场$U$和$T$的垂直输运$Uw$和$Tw$又会影响扰动场。同时（10.7）式中还包含有重要的温度平流$w\frac{\partial\theta}{\partial z}$。

令
$$\begin{cases} w = w_m(t)\sin\dfrac{\pi z}{H} \\ \theta = \theta_m(t)\sin\dfrac{\pi z}{H} - \theta_n(t)\sin\dfrac{2\pi z}{H} \end{cases}$$

将（10.8）式代入（10.7）式并无因次化得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 - x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= (\mathrm{Re}\,x_1 - \pi^2)x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= 1 - x_3 - \frac{a}{2}x_2x_4 \\ \dot{x}_4 &= c\left(x_3 - \frac{\gamma_e}{\gamma_0}\right)x_2 - \pi^2x_4 - \pi x_2x_5 \\ \dot{x}_5 &= -4\pi^2x_5 + \frac{\pi}{2}\mathrm{Re}\,x_2x_4 \end{aligned} \qquad (10.8)$$

式中 $x_1 = \dfrac{U}{U_0}$, $x_3 = \dfrac{T}{T_0}$, $U_0 = \dfrac{PH}{\nu}$, $T_0 = \dfrac{QH}{\nu}$,

$$x_2 = \frac{w_m}{P^{\frac{1}{2}}},\quad x_4 = \frac{\theta_m}{\nu P^{\frac{1}{2}}H^{-2}\beta^{-1}},$$

$$x_5 = \frac{\theta n}{\nu^2H^{-3}\beta^{-1}},\quad \tau = \frac{\nu}{H^2}t,\quad a = \frac{\nu P}{H^2\beta Q},$$

$c = \dfrac{\gamma_0\mathrm{Ri}\mathrm{Re}^2}{\gamma_e - \gamma_0}$, $\gamma_0 = \dfrac{T_0}{H}$, $\beta = \dfrac{g}{\overline{T}}$, γ_e为绝热递减率，$\overline{T}$为平均温度，符号“·”表示对无因次时间τ的微商。

方程组（10.8）式实际上包括了三个控制参数，雷诺数Re，里査逊（Richardson）数Ri和普朗特数 $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\kappa}$（现在

$\mathrm{Pr}=1$)。若没有温度平流项 $w\dfrac{\partial\theta}{\partial z}$，则$x_5=0$，若又不考虑基本速度场（$x_1=0$）和基本温度场（$x_3=0$），则（10.8）式就化为著名的洛伦兹方程。所以从物理上讲，洛伦兹方程只反映基本温度场（上下板之间温差所代表的莱雷数）变化后扰动之间的关系，但缺少扰动对基本场的反馈作用。为了简化起见，我们先设 $x_5=0$。我们分析（10.8）式的定常状态，令$\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dot{x}_3=\dot{x}_4=0$，导得

$$\begin{cases} O:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,0,1,0) \\ T:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi^2}{\mathrm{Re}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-4\mathrm{Ri}},\ 1-\dfrac{2\pi^2}{\mathrm{Re}}+\sqrt{1-4\mathrm{Ri}},\ \dfrac{\gamma_e}{\gamma_0}+\dfrac{a\pi^2}{2}(-1+\sqrt{1-4\mathrm{Ri}}), \\ \qquad \dfrac{1}{4}\mathrm{Re}^2(-1+\sqrt{1-4\mathrm{Ri}})^2(1+\sqrt{1-4\mathrm{Ri}}-\dfrac{2\pi^2}{\mathrm{Re}})\Big) \end{cases} \tag{10.9}$$

从（10.9）式看出，定常状态O代表无扰动场的基本场，定常状态T存在的必要条件是$\mathrm{Ri}<\dfrac{1}{4}$。

现在分析定常状态O的稳定性，它的雅可比矩阵的形式为

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Re}-\pi^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Ri}\,\mathrm{Re}^2 & 0 & -\pi^2 \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1$$

$$\lambda_3=\lambda_4=\frac{(Re-2\pi^2)\pm Re\sqrt{1-4Ri}}{2} \tag{10.11}$$

根据分岔条件$\lambda_{3,4}$的实部穿过虚轴，所以当$Ri>\frac{1}{4}$时，霍夫分岔条件是$Re=2\pi^2$。当$Re<\frac{1}{4}$时，叉型分岔的条件是

$$Ri=\frac{\pi^2}{Re^2}(Re-\pi^2) \tag{10.12}$$

这样在参数平面（Ri，Re）上，直线$Re=2\pi^2$和曲线(10.12)将大气运动分成四个区域，见图10.4。计算机上

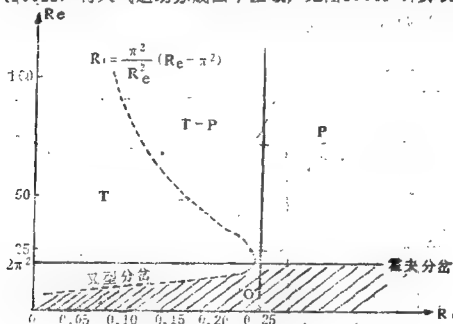


图10.4 大气运动状态在参数平面(Ri，Re)上的分布

计算表明，区域O是定常吸引子。区域P是周期吸引子，它代表内重力波。区域T是不稳定的定常状态，当$x_5\neq0$时我

们已算出浑沌状态，它代表湍流区域。区域T-P代表湍流和周期区之间的过渡区，它兼有湍流和波的特点，或间歇湍流区。而且分析表明，初始若 $Ri>\frac{1}{4}$，此时是周期波动状状，经过一段时间演化以后扰动给基本场以反馈而使Ri小于$\frac{1}{4}$，而形成湍流状态，这反应了波和湍流之间的相互作用。

§4 微观浑沌和宏观浑沌

大家知道经典热力学是建立在分子杂乱无章的运动基础上的，所以可以叫做分子浑沌。而现在已经发现在我们的宇宙中以及生命组织的微观宇宙中却出现宏观浑沌。图10.5比较了这两者的相同之处和差异。

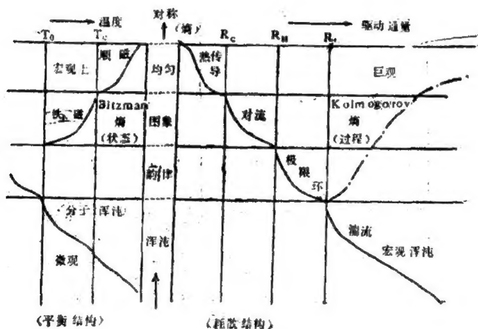


图 10.5 微观浑沌和宏观浑沌

图中向上箭头指示熵增加或对称性增加的方向。所以从最上部到下部分别是空间均匀情况、空间图象、时间振荡（韵律）和浑沌。向上箭头左边是热力学的世界或叫平衡结构，温度作为横坐标或无因次能量密度。高温时是顺磁性的无极化状态，而降低温度到居里点T_c，降低空间对称状态而导致铁磁图象。向上箭头的右边是远离平衡的耗散结构，其横坐标为驱动通量或无因次的热通量R，贝纳对流中当R（代表莱雷数）较小时，流体处于热以传导方式下的均匀静止状态，当$R>R_c$后出现对流的滚动图象结构。这两个阶段和平衡结构相平行。在进一步增加R时，就处于远离平衡的状态，在$R=R_H$时对流上迭加一个时间振荡（极限环），到$R=R_t$达到非周期的湍流状态，这就是宏观浑沌的典型例子。当增加R时，系统的对称性在连续的分岔点处降低，即浑沌的对称性低于周期状态的对称性，正如图中向下的曲线所示。

正象在平衡结构中我们看到，当微观上的对称性愈低（分子杂乱无章），宏观上看其对称性就愈高（均匀状态）。在耗散结构中，宏观上浑沌的对称性愈低，那么巨观上浑沌的对称性就愈高。正象在平衡结构中引进波耳兹曼-吉布斯（Gibbs）熵测量宏观状态的对称性一样，我们现在引进了哥尔莫戈洛夫熵作为巨观上测量对称性的量度。

作了如上的对比以后，热力学上是研究能量的输送过程，宏观浑沌实际上是研究信息的输送过程。有人提出层流和湍流的共同点是能量是由大尺度输送到小尺度，不同点是，层流是大尺度向小尺度输送信息，湍流是小尺度向大尺度输送信息，见图10.6。

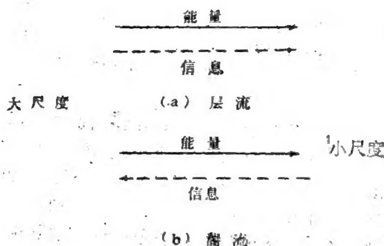


图 10.6 层流和湍流的能量和信息传递方向

参 考 书 目

〔1〕 Schuster, H.G., Deterministic Chaos, An Introduction, Springer-Verlag, 1984.

〔2〕 Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, Freemann, 1982.

〔3〕 Peitgen, H. O. and Richter, P. H., The Beauty of Fractals, Springer-Verlag, 1986.

〔4〕 尼科里斯，普利高津，探索复杂性，四川教育出版社，1986.

〔5〕 Guckenheimer, J., and Holmes, P. J., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

〔6〕 Kubicek, M., and Marek, M., Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures, Springer-Verlag, 1983.

〔7〕 Hao Bai-Lin(郝柏林), Directions in Chaos, WSPC, 1987.

〔8〕 Abraham, R.H., and Shaw, C. D., Dynamics: The Geometry of Behavior, Aerial Press Inc., 1983.

〔9〕 Velo, G., Regular and Chaotic Motion in Dynamical Systems, Plenum, 1985.

〔10〕 Swinney, H.L., Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Springer-Verlag, 1981.